UNIVERSITÉ DE LIÈGE Faculté des Sciences



## Méthodes numériques appliquées à l'environnement

J.-M. Beckers



Année académique 2002-2003

# Contents

Ι	Outils de modélisation numérique	7			
1	Histoire         1.1       Evolution des modèles mathématiques         1.2       Evolution de la modélisation et ressources informatiques         1.3       Les particularités du système marin         1.3.1       Rotation, stratification, inhomogéniétés         1.3.2       Spectres et parametrisations				
2	Equations de base2.1Lois de conservations2.2Equations types pour les fluides de l'environnement	<b>17</b> 18 18			
3	Différences finies         3.1       Notions de différences finies et discrétisation         3.2       Précision d'une différence finie	<b>19</b> 20 21			
4	Equations différentielles ordinaires         4.1       Equations 0D         4.2       Discrétisations d'Euler         4.3       Multistage         4.4       Troncature         4.5       Stiffness	<b>23</b> 24 24 24 24 24			
5	Equations aux dérivées partielles5.1Equations multi D5.2stabilité convergence5.3Dispersion et propagation5.4Volume fini et conservation5.5Application de conditions aux limites	<b>25</b> 26 26 26 26 26			
6	Discretisation de processus particuliers         5.1 Diffusion 1D         5.2 Coriolis         5.3 Pression et surface libre         6.3.1 Equation de poisson         6.3.2 Mode-splitting	27 28 28 28 28 28 28			
	A A A Vection	78			

	angements de coordonnées et grilles non-structurées	29
7.1	Changement de coordonnées	30
	7.1.1 Coordonnées latérales	30
	7.1.2 Coordonnée verticale	36
7.2	Placement d'une grille numérique	36
	7.2.1 Grille discrète	36
	7.2.2 Grilles horizontales décentrées	37
	7.2.3 Grilles verticales décentrées	37
	7.2.4 Discrétisation temporelle	37
	7.2.5 Pression de surface	38
	7.2.6 Schémas d'advection	38
	7.2.7 Force de Coriolis	38
	7.2.8 Equation d'état	38
7.3	Grilles adaptatives	38
7.4	Nesting	38
8 M	thodes Lagrangiennes .	39
8.1	Advection-dispersion	40
8.2	Advection-dispersion d'une nappe	40
8.3	Rejets ponctuels, solutions générales	42
	8.3.1 Rejet ponctuel	44
8.4	Traceurs en océanographie	44
8.5	Dispersion Lagrangienne	45
	8.5.1 Approche discrète	45
	8.5.2 Approche continue	47
	8.5.3 Discrétisation	51
9 Ca	ibrations Validations Vérifications	55
91	Calibration	55 56
9.7	Validation	56 56
9 3	Etudes de sensitivité	50 57
9.2	Autres concepts liés à la fiabilité d'un modèle	57 57
2.	9.4.1 Contrôle de qualité	57 57
	942 Benchmarking	57 57
	943 Transportabilité	57 57
	944 Robustesse	57 58
	945 SKILL	50 58
94	Graphiques	50 59
9.6	Ouantités intégrales	59 59
9.0	Paramètres statistiques	59 59
9.8	Analyses de séries de données	59 59
9.0 9.0	Coupes et projections	57 60
9.1 9.1	Overturning streamfunction	60 60
9.1 9.1	1 Echanges d'énergie	60 60
0, 1	$\begin{array}{c} 1  \text{Lemanges a chergic}  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  $	60 60
9.1 9.1	3 EOF	60 60
	0121 SVD	50 60

### CONTENTS

	9.13.2 Analyse de signaux	•••		• • •		•		•		64
	9.14 Modes physiques									73
	9.15 Séparation de facteurs	•••				•	 •	•	•••	74
Π	II Modèles numériques complets									77
10	10 Modèle 1D									79
	10.1 Equations									80
	10.2 Modèle 1D à fermeture turbulente									81
	10.2.1 Equations 1D									81
	10.2.2 Stratification et longueur de mélange .	•••				•	 •			83
11	11 Modèle de vorticité 2D									93
	11.1 Equations									94
	11.2 Méthodes numériques									96
	11.2.1 Jacobien d'Arakawa									96
	11.2.2 Laplacien discret									98
	11.2.3 Schéma d'Euler									98
	11.2.4 Surrelaxation Red - Black, Gradient Cor	njugé, I	FFT, I	Multig	grille					99
	11.2.5 Conditions limites aux côtes									100
	11.2.6 Conditions de stabilité numérique									101
	11.2.7 Conditions initiales									102
	11.3 Application									102

### CONTENTS

# Part I

# **Outils de modélisation numérique**

## Histoire

### **1.1** Evolution des modèles mathématiques

Comme beaucoup de développements, les premières idées de modélisation mathématique on vu le jour en météorologie plutôt qu'en océanographie. Ainsi, l'historique de la modélisation des océans commence en météorologie et nous pouvons en évoquer les points marquants. Le concept de modélisation par les lois physiques a été introduit en météorologie au début du siècle [?], et l'idée d'une prévision du temps à partir de la connaissance de conditions initiales et des lois d'évolution est identifiée. Déjà a cette époque, la notion de fenêtre spectrale apparaît, dans le sens que l'on suppose que les lois décrivant les processus dépendent de l'échelle à laquelle l'on s'intéresse. Notons qu'à cette époque Poincaré remet en question cette idée en posant le problème de la précision sur les conditions initiales et la difficulté de prévisions due au caractère chaotique de l'atmosphère [?]. Cette difficulté fondamentale n'a été redécouvert que bien plus tard [?, ?], et entretemps, on estimait pouvoire prédire le temps étant donné son caractère déterministe. On s'attache donc au méthodes de prévision par les lois de la physique, mais rapidement est apparu le problème pratique de la résolution des équations et la nécessité de pouvoir conduire les calculs de façon suffisemment précise et rapide pour être d'une utilité quelconque en pratique [?]. Devant les difficultés où l'irréalisme des approches analytiques l'idée d'approximation numérique a fait son apparition [?]. Ainsi, le premier essai de prévision météorologique basé sur une discrétisation est attribuée à Richardson, qui en 1922 avait calculé à la main l'évolution de deux colonnes d'air en fonction de vents mesurés et d'un algorithme de discrétisation simple de l'évolution de la masse d'air.

Il m'a fallu une bonne partie de six semaines pour remplir les formulaires de calcul et établir la nouvelle distribution dans deux colonnes verticales, pour la première fois. Mon bureau était un tas de foin dans un froid cantonnement en retrait. Avec de l'entraînement, le travail d'un calculateur moyen pourrait aller sans doute dix fois plus vite. Avec un pas de temps de trois heures, alors trente-deux personnes pourraient calculer exactement deux points de façon à avancer à la même vitesse que le temps, sans tenir compte du très grand gain de vitesse que l'on constate invariablement quand une opération com- plexe est divisée en parties plus simples, sur lesquelles des individus se spécialisent. Si les dimensions des carreaux de l'échiquier sont de 200 kilomètres sur l'horizontale, il y aurait 3 200 colonnes sur la Terre entière. Comme dans les régions tropicales le temps est souvent connu à l'avance, on peut considérer qu'il y a 2 000 colonnes actives. De cette façon,  $32 \ge 2000 = 64\ 000$  calculateurs seraient nécessaires pour faire la course avec le temps sur la Terre entière. C'est un nombre plutôt considérable. Sans doute, dans quelques années, sera-t-il possible de simplifier le schéma de calcul. Mais, de toute façon, l'organisation qui est proposée est celle d'une fabrique de prévisions centralisée pour l'ensemble de la Terre, ou pour des parties limitées par des frontières où le temps est invariable, avec des calculateurs humains spécialisés sur des équations différentes. Espérons pour eux qu'ils seront régulièrement affectés à de nouvelles opérations. Après un raisonnement aussi difficile, on peut sans doute avoir un peu de fantaisie. Imaginons un immense hall en forme de théâtre, sauf que les galeries et balcons y feraient un tour complet, occupant ainsi la place dévolue à la scène. Les murs de cet espace seraient peints pour représenter une carte de la Terre. Le plafond représenterait les régions polaires septentrionales, l'Angleterre serait dans les balcons, les tropiques dans les baignoires du haut, l'Australie au niveau des corbeilles et l'Antarctique dans la fosse. Une myriade de calculateurs humains sont au travail sur le temps de la partie de la carte où ils siègent, mais chacun ne s'occupe que d'une équation ou d'une partie d'équation. Le travail de chaque région est coordonné par un employé de haut rang. De nombreux petits tableaux affichent les valeurs instantanées de façon à ce que les calculateurs voisins puissent les lire. Chaque nombre est ainsi affiché dans trois niveaux adjacents, de façon à maintenir les communications avec le Nord et le Sud sur la carte. Du plancher de la fosse s'élève une haute tour qui atteint la moitié de la hauteur du théâtre. Elle porte une chaire sur son sommet: le responsable de l'ensemble y est assis, entouré de plusieurs assistants et messagers. Une de ses tâches consiste à maintenir une vitesse de progression constante dans toutes les parties du globe. De ce point de vue, il ressemble au chef d'un orchestre dont les instruments seraient des règles à calcul et des machines à calculer. Mais au lieu d'agiter une baguette, il pointe un rayon lumineux rose en direction des régions en avance sur les autres et un rayon bleu vers celles qui sont à la traîne. Quatre employés de haut niveau collectent le temps au fur et à mesure qu'il est calculé, et l'expédient à l'aide d'une messagerie pneumatique vers une salle calme. De là, il sera codé et téléphoné vers la station d'émission radio. Des messagers transportent les piles de formulaires de calcul usagés vers un local d'archivage au sous-sol. Dans un bâtiment voisin, un service de recherche est installé qui invente des améliorations. Mais il est nécessaire de faire des essais à petite échelle avant de procéder à des changements dans les algorithmes utilisés dans le théâtre de calcul. Dans le sous-sol, un enthousiaste passe son temps à observer des tourbillons dans le liquide qui remplit un bassin en rotation, mais jusqu'à présent la méthode numérique donne de meilleurs résultats. Dans un autre bâtiment sont installés les services financiers, courrier et administratif habituels. À l'extérieur se trouvent des terrains de jeux, des habitations, des montagnes et des lacs, car on a pensé que ceux qui calculent le temps devraient pouvoir le respirer librement.

(d'après la traduction dans ROCH93) Dans cette déscription imagée, nous trouvons déjà tous les ingrédients d'un système de prévision numérique, ce compris les notions de calculateur parallèle avec échanges de messages, d'archivage de calculateurs spécialisés (type RISC) et de tâches superviseurs. Cependant, le nombre de calculateurs humains requis par Richardson (64000 hommes développant moins que 0.1 Mflop) est loin du la puissance de calcul nécessaire à ce jour (de l'ordre tu Tera-flop) Il est intéressant de noter que le schéma qu'il a utilisé est numériquement instable mais que la courte simulation effectuée eu égard des ressources de calcul manuelles ou mécaniques évitait de mettre cette instabilité en évidence.

L'idée de prévision numérique est alors mis en veilleuse jusqu'à l'apparition d'outils de calculs suffisemment rapides pour envisager une modèle prédictif. C'était le cas vers 1946, avec l'ENIAC (Electronic Numerator Integrator Analyser and Computer) initialement installé pour le calcul de trajectoires de projectiles pendant la guerre et recyclé ensuite vers les études pour la bombe H. Sous l'impulsion de Von Neumann, qui faisait partie du committé scientifique supervisant le développement de l'ENIAC et qui avait introduit la possibilité de le programmer, l'ENIAC devait être rendu accessible par des météorologistes afin d'entamer une prédiction du temps dans la lignée de Richardson. En vue des possibilités de calcul limités de l'ENIAC (quelque 500 opérations par seconde), des pannes fréquentes et l'abscence de calcul en virgule flottante, seulement un modèle barotrope limité aux Etats Unis a pu être utilisé pour des premières prévisions début 1949 [?]. Au fur et à mesure que des machines plus performantes et plus facilement programmables ont fait apparition, des modèles de plus en plus sophistiqués on vu le jour et on passa graduellement à des modèles baroclines développés en 1953 [?] et mis en route en 1955 sur un IBM701 (avec quelques

milliers de Flops). Jusqu'en 1962 c'est cependant le modèle barotrope qui reste le modèle pour les prévisions opérationelles.

Lors de ces premiers développements de modèles numériques, et on a vite constaté les problèmes liés aux instabilités numériques, et un grand effort a été déployé pour remédier aux problèmes rencontrés. Une célèbre expérience numérique de PHIL56 étudiant l'instabilité barocline avait notemment donné lieu à une lente instabilité non-linéaire seulement expliquée en 1959 [?]. Durant cette période, de longs débats ont eu lieu sur la question s'il est préférable de construire un schéma stable en toute circonstance mais potentiellement moins précis, où au contraire favoriser les schémas à erreur de troncature minimale mais moins robustes MIYA00.

La première approche a conduit au développement de la discrétisation du terme d'advection connue sous le nom de Jacobien d'Arakawa, en hommage à son inventeur A. Arakawa [?]. Sa discrétisation conserve deux quantités quadratiques en les variables d'état, de sorte que les variables d'état restent bornés et que le schéma est stable. Curieusement, les mathématiciens appliqués de l'époque n'ont pas été très enthousiastes à propos de ce schéma à leurs yeux trop imprécis. Le livre de référence en méthodes numériques publié peu après [?] ne mentionne même pas le schéma d'Arakawa!

Alors que les modèles atmosphériques étaint en développement et utilisation depuis une quinzaine d'années, les premiers modèles oceaniques sont apparus dans les années soixante, d'abord en version barotrope [?] et ensuite en version barocline d'équations primitives [?]. A ce moment un modèle aux équations primitives pour l'atmosphère existait depuis le début des années soixante SMAG58,Smag63

1960 primitive equation models: Smagorinsky

Now best model in Reading ECMWF (European Centre for Medium Range Weather Forecast) Ocean: Sarkisyan first global prediction

K. Bryan 1963 first integration of barotropic ocean

[?] method to solve primitive equation model of ocean dynamics including topography and simple turbulent closure schemes

20 years almost unmodified model, now developments (polar regions, free surface ...)

Meteorological still in advance (data assimilation). also observational network easier to implement and detect signals which are stronger and of larger scale.

[?].

Les premiers modèles spectraux ont été développés bien entendu pour les modèles atmosphériques. En effet, l'absence de frontières latérales et la périodicité du domaine conduit tout naturellement à l'idée de développement de solutions en termes de fonctions propres sur une sphère. Comme l'ont démontré Orszag et ???, les méthodes spectrales ont généralement un comportement de convergence plus rapide que les différences finis

Les développements numériques spécifiques et adaptés à chaque type de modèle rendent aussi de plus en plus difficile une modification majeure des codes de calcul utilisés. Ainsi le GFDL n'a pas voulu migrer son modèle atmosphérique vers un modèle semi-Lagrangien (comme utilisé par ECMWF) pour des raisons purement économiques.

Aujourd'hui, la plupart des modèles mathématiques-numériques ont atteint un tel degré de sophistication qu'il devient difficile pour un non-spécialiste d'en apprécier les avantages et inconvénients ainsi que les limites inhérentes aux choix effectués. L'objectif de cet oeuvre est de quelque peu rendre cette compréhension plus accessible.

Les modèles peuvent également être utilisés pour démontrer que des modèles de processus linéaires théoriques sont capables de reproduire l'essentiel d'un processus réel. En effet, en général les modèles linéaires ne s'appliquent qu'à des processus de faible amplitude, souvent impossibles à détecter dans la nature. Si un modèle numérique non-linéraire montre que les caractéristiques d'un modèle linéraire restent d'application pour des amplitudes observées, on a en quelque sorte validé un modèle conceptuel linéaire par un modèle plus complexe. Ainsi, la théorie de l'instabilité barocline était connue avant 1956, mais ce sont notamment les expériences numériques de Phillips PHIL56 avec un modèle quasi-géostrophique à deux couches qui ont montré que le modèle reproduisait correctement les observations. De là il était facile d'analyser les résultats du modèle en comparaison avec la théorie linéaire pour constater que le modèle linéaire prédit correctement la limite de stabilité en fonction du cisaillement vertical et les flux des perturbations de densité.

Livre Robert...

???????

### **1.2** Evolution de la modélisation et ressources informatiques

Evolution of computing power is exponential ! Now 1Gflop per processor

Cray first real supercomputer which allowed first realistic simulations. Cray now Silicon Graphics

Now technological limitations for single processors: 1Gh means scales of less than 30cm for data exchange! On the other hand heat problems. Also inprint by light now limited due to wave-length of visible light.

How increase of speed is achieved?

First technological advances

Then modification of in and outputs to asynchronous versions.

High level languages (FORTRAN for scientific operations is easier than assembler) Architecture of CPU

Mermory, the faster, the more expensive. Least expensive: magnetic tapes, then magnetic disc. SISD Single instruction, single data

Vector machines arithmetic operations are in fact a successions of binary operation. Processor treats already next set of operands while still working on the previous one. Needs vector data and non-recursive data.

MIMD: Multiple instruction, multiple data:

shared-memory (Cray type), now switch connection problem: scaling linear up to 10-20 processors because of memory access but "easy" programming.

distributed memory each processor has its own memory with very fast access. When data of others are needed, slower access and more difficult data access: message passing and synchonisation must be programmed (PVM, MPI). Typical massively parallel machine.

IBM, HP, Sun, Compac, Silicon Graphics, Fujitsu-Nec: now combination of the two technologies

[?] Climate modeling

## **1.3** Les particularités du système marin

### 1.3.1 Rotation, stratification, inhomogéniétés

### **1.3.2** Spectres et parametrisations

Rapport d'aspect

**Equations de base** 

2.1 Lois de conservations

## 2.2 Equations types pour les fluides de l'environnement

**Différences finies** 

### 3.1 Notions de différences finies et discrétisation

Lorsque nous utilisons des modèles sur un ordinateur, nous devons réaliser que ce dernier nest pas capable de stocker des valeurs dune fonction en tout endroit. Autrement dit, lordinateur ne peut garder en mémoire quun certain nombre de valeurs de la fonction en un certain nombre de points. Or, les lois mathématiques gouvernent les systèmes physiques ; eux font appel aux notions de fonctions continues, cest-à-dire dont on peut évaluer la valeur à nimporte quel endroit. Quand nous passons donc à un ordinateur, nous devons remplacer cette notion de fonction continue par une notion de fonction discrète que nous connaissons quen un certain nombre de points. Ainsi, sur le graphique de référence, nous voyons que la fonction f de x peut être évaluée en un nombre donné de points xi où la valeur de la fonction vaut f de xi, cest-à-dire f de i. Ce sont ces valeurs de la fonction fi que lon peut stocker et calculer dans un ordinateur mais nous ne pourrons pas calculer toutes les valeurs intermédiaires entre deux points simplement parce que la fonction continue a une infinité de points sur lesquels on peut en calculer la valeur alors que les ordinateurs par construction ont une taille finie. Dès lors que lon a remplacé une fonction continue par un ensemble de valeurs à des points donnés, va se poser le problème du calcul des dérivées. En effet, mathématiquement une dérivée est définie par équation où lincrément entre x et x + delta x va tendre vers zéro. Or puisque nous ne connaissons pas la valeur de la fonction en tous points, nous ne pourrons pas faire tendre cette valeur de delta x vers zéro puisque nous ne connaissons la valeur quen un point ? xi + delta x avec un delta x donné. La notion de différences finies vient alors tout naturellement à lesprit, cest-à-dire quen lieu et en place de la définition de la dérivée où le delta x tend vers zéro, nous utiliserons la définition de la différence finie où cette différence de fonction est évaluée pour un delta x fini et donné. Lobjectif est bien sûr de pouvoir remplacer dans les équations mathématiques les dérivées par des différences finies puisque, si nous procédons de cette sorte là, connaissant la valeur de la fonction en un certain nombre de points et en remplaçant les dérivées par des différences finies justement en fonction de la valeur de la fonction en ce point, nous pouvons essayer de calculer les différents termes dune équation mathématique décrivant lautre système. Les choses ne sont évidemment pas aussi simples que cela en pratique. Il ne suffit pas de remplacer partout les différences finies de façon brutale et pour un delta x quelconque, mais au contraire, il faudra déployer toute une série de techniques pour utiliser les différences finies de façon adéquate. Le problème majeur étant de connaître la valeur discrète delta x que lon peut utiliser pour remplacer une dérivée par une différence finie sans faire une erreur trop grande lors de cette opération. En effet, si nous imaginons la fonction de la figure de référence, il est bien clair que selon la valeur du delta x, lapproximation de la dérivée par une différence finie sera très bonne si le delta x est beaucoup plus petit que la longueur typique sur laquelle la fonction varie. En effet, si delta x est beaucoup plus grand que l, il est clair que la sécante entre les deux points x et x + delta x sera une très mauvaise approximation de la dérivée locale en x. Par contre, si le delta x devient beaucoup plus petit que le l, nous voyons sur le graphique que la séquence (?) est une très bonne approximation de la dérivée, cest-à-dire la pente locale en x. Lerreur que lon fera en remplaçant les dérivées par des différences finies dépendra donc fortement de léchelle delta x par rapport à léchelle aux variations de la solution que lon cherchera. Nous pouvons quantifier cette erreur-là en faisant appel à la série de Taylor vue précédemment. Nous constatons en effet quen variables adimensionnelles qui mesurent justement le delta x ou le delta t par rapport à une longueur caractéristique, si le delta x dépasse cette longueur caractéristique, les différents termes de la série de Taylor vont en croissant. La conséquence de cette croissance des différents termes est que nous ne pouvons pas négliger justement les termes suivants de la série. Autrement dit, la série convergera très mal si le delta x est beaucoup plus grand que la longueur caractéristique. Dans ce cas-là, on obtiendra des très mauvais résultats en remplaçant la dérivée par une différence finie du premier ordre puisque ceci revient à laisser tomber les termes de dérivées ? dans une série de Taylor, terme qui nest pas négligeable du tout quand le delta x divisé par l devient grand. A linverse, si le delta x est beaucoup plus petit que l, la longueur caractéristique, les différents termes de la série de Taylor vont décroissants et nous pouvons arrêter relativement tôt la série. Autrement dit, nous pouvons remplacer les dérivées par des différences finies. En résumé, pour pouvoir remplacer une dérivée par une différence finie, il faut sassurer que lespacement discret que lon utilise soit suffisamment petit par rapport aux échelles de variations de la solution ou de la fonction que lon veut représenter. En pratique, cela ne sera pas toujours facile dassurer. Ceci pour deux raisons. La première peut être de niveau pratique, simplement parce que surtout si nous utilisons des espacements très réduits, nous pouvons rapidement arriver à une demande de mémoire de lordinateur trop importante. La deuxième raison est plutôt dordre conceptuel. En effet, si nous voulons a priori imposer que lespacement soit beaucoup plus petit que la longueur typique des variations de la fonction, il faudrait que lon connaisse cette longueur de variations. Or, très souvent, ce que nous voulons calculer est justement la solution à problèmes de sorte que nous ne connaissons pas nécessairement a priori sa structure ni ses échelles.

## 3.2 Précision d'une différence finie

CHAPTER 3. DIFFÉRENCES FINIES

# **Equations différentielles ordinaires**

- 4.1 Equations 0D
- 4.2 Discrétisations d'Euler
- 4.3 Multistage
- 4.4 Troncature
- 4.5 Stiffness

# **Equations aux dérivées partielles**

- 5.1 Equations multi D
- 5.2 stabilité convergence
- **5.3** Dispersion et propagation
- 5.4 Volume fini et conservation
- 5.5 Application de conditions aux limites

# **Discretisation de processus particuliers**

### CHAPTER 6. DISCRETISATION DE PROCESSUS PARTICULIERS

- 6.1 Diffusion 1D
- 6.2 Coriolis
- 6.3 Pression et surface libre
- 6.3.1 Equation de poisson
- 6.3.2 Mode-splitting
- 6.4 Advection

# Changements de coordonnées et grilles non-structurées

Dans ce chapitre, nous allons brièvement décrire les différentes techniques numériques utiles pour la réalisation d'un code de calcul susceptible de résoudre approximativement les équations primitives 3D. Nous intégrons dans cette description les différentes formulations en termes de systèmes de coordonnées puisqu'en dernier ressort, elles ne sont introduites que pour faciliter la discrétisation ultérieure. En effet, comme il a été vu au chapitre ??, les équations de base des modèles sont généralement formulées sous forme vectorielle valable en tout système de coordonnées. La résolution des équations nécessite cependant le passage à un système de coordonnées particulier. Ainsi le passage à un système de coordonnées cartésien est de mise quand il s'agit de résoudre analytiquement des équations simplifiées. De même, le système de coordonnées sphériques est le système de coordonnées de choix pour des études sur une géométrie sphérique comme la Terre. Quand nous voulons résoudre les équations de façon numérique, nous devons choisir un système de coordonnées. On ne peut en effet calculer les valeurs des composantes d'un vecteur que si l'on a choisi un système de coordonnées. Il est clair également que le choix du système de coordonnées va conditionner le choix des méthodes numériques puisque la valeur des composantes dépendra du système de coordonnées choisi. Ainsi, si nous imaginons, par exemple, un front qui se propage à une vitesse donnée, si nous avions un système de coordonnées qui bouge exactement à la vitesse du front, dans ce système de coordonnées, la solution s'écrirait de façon extrêmement simple puisque dans ces systèmes de coordonnées, la situation serait figée. Ceci mène tout naturellement à l'idée de choisir des systèmes de coordonnées suivent au mieux les propriétés physiques ou géométriques du problème considéré. Dans la suite, nous passerons en revue les différents systèmes de coordonnées que les modélisateurs choisissent habituellement en essayant de mettre en avant les avantages et inconvénients des différents systèmes. En vue de l'anisotropie des écoulements marins, nous allons distinguer les coordonnées verticales et horizontales, ce qui se justifie d'autant plus que les processus selon la direction latérale et verticale sont de nature souvent très différente.

Aussi le choix de garder une coordonnée dans la direction de la gravité: pas de projection de forces importantes..... A FINIR

### 7.1 Changement de coordonnées

### 7.1.1 Coordonnées latérales

Parmi les coordonnées latérales, nous avons, dans l'ordre croissant en complexité, les coordonnées cartésiennes, les coordonnées sphériques, les coordonnées curvilignes orthogonales et les coordonnées curvilignes non orthogonales.

### Coordonnées cartésiennes

L'expression des opérateurs mathématiques est fortement simplifiée lorsqu'on reste en coordonnées cartésiennes puisque les opérateurs de gradient, rotationnels, … prennent leur forme habituelle simple. Dans ce cas, la discrétisation numérique des opérateurs est tout aussi naturelle et rapidement mise en oeuvre. Si dans ce système de coordonnées, une grille numérique uniforme est choisie (voir sous-section 7.2.1), nous perdons toute possibilité d'aligner la grille numérique sur une topographie complexe ou un phénomène physique stable que l'on connaisse a priori. Aussi, le choix des systèmes de coordonnées cartésiens limite le modèle à des problèmes de taille faible par rapport à la surface du globe.



**Figure 7.1 :** *Plan*  $\beta$ 

#### **Coordonnées sphériques**

Comme, d'habitude, nous nous intéressons aux courants à la surface de la Terre, il est tout à fait naturel de vouloir exprimer des composantes du vecteur vitesse dans un système de coordonnées dont deux vecteurs de base sont tangents à la surface de la Terre. Pour des coordonnées cartésiennes, ce n'est possible qu'en se limitant à une région très restreinte de la surface de la Terre alors que, pour des coordonnées sphériques, bien entendu, nous avons un système de coordonnées naturel pour la planète. Ce système de coordonnées est donc le système de coordonnées par excellence pour tous les problèmes globaux, que ce soit en météorologie ou en océanographie. En contre-partie du caractère naturel du système de coordonnées, nous avons bien sûr une complexité accrue dans l'expression des opérateurs mathématiques. A titre d'exemple, nous pouvons écrire les équations de quantité de mouvement dans des coordonnées sphériques comme suit : Tout comme pour les coordonnées cartésiennes, si une grille uniforme est utilisée dans ce système de coordonnées, nous perdons la possibilité d'ajuster la grille à la géométrie ou à un processus particulier. Nous rencontrerons aussi un problème au niveau des pôles puisque les coordonnées sphériques possèdent un pôle mathématique à cet endroit. Egalement aux pôles, nous constatons que les lignes de coordonnées méridiens se rapprochent de plus en plus de sorte qu'une grille uniforme en latitude/longitude sera une grille physique dans l'espace euclidien très déformée avec une résolution beaucoup plus forte près des pôles qu'à l'Equateur.

projetées dans ces axes<sup>1</sup> :

$$\frac{\partial w}{\partial r} + 2\frac{w}{r} + \frac{1}{r\cos\lambda}\frac{\partial v\cos\lambda}{\partial\lambda} + \frac{1}{r\cos\lambda}\frac{\partial u}{\partial\phi} = 0,$$
(7.1)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{uw}{r} - \frac{uv}{r}\tan\lambda - 2\Omega v\sin\lambda + 2\Omega w\cos\lambda = -\frac{1}{\rho r\cos\lambda}\frac{\partial p}{\partial\phi} + \frac{F_{\phi}}{\rho},\tag{7.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{vw}{r} + \frac{u^2}{r}\tan\lambda + 2\Omega u\sin\lambda = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\lambda} + \frac{F_\lambda}{\rho},\tag{7.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - \frac{u^2 + v^2}{r} - 2\Omega u \cos \lambda = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + \frac{F_r}{\rho},\tag{7.4}$$

où 
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r\cos\lambda}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial\lambda} + w\frac{\partial}{\partial r}.$$
 (7.5)

Puisque la profondeur ces océans est très faible par rapport la distance r au centre de la terre, on remplace généralement r par le rayon moyen a de la terre dans ces équations. De même, il est tout à fait licite de négliger le facteur géométrique w/r devant  $\partial w/\partial r$ . On désigne alors par z la coordonnée locale vertical mesurée positivement vers le haut à partir de la surface de la mer On obtient alors:

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{a\cos\lambda}\frac{\partial v\cos\lambda}{\partial\lambda} + \frac{1}{a\cos\lambda}\frac{\partial u}{\partial\phi} = 0,$$
(7.6)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{uw}{a} - \frac{uv}{a}\tan\lambda - 2\Omega v\sin\lambda + 2\Omega w\cos\lambda = -\frac{1}{\rho a\cos\lambda}\frac{\partial p}{\partial\phi} + \frac{F_{\phi}}{\rho},\tag{7.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{vw}{a} + \frac{u^2}{a}\tan\lambda + 2\Omega u\sin\lambda = -\frac{1}{\rho_0 a}\frac{\partial p}{\partial\lambda} + \frac{F_\lambda}{\rho},\tag{7.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - \frac{u^2 + v^2}{a} - 2\Omega u \cos \lambda = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q}{\partial z} - b + \frac{F_r}{\rho},\tag{7.9}$$

$$\operatorname{pu} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\lambda}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\lambda} + w\frac{\partial}{\partial z}$$
(7.10)

Pour une écriture sous forme plus de divergence de flux, on peut aussi utiliser

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{a\cos\lambda}\frac{\partial uC}{\partial\phi} + \frac{1}{a\cos\lambda}\frac{\partial v\cos\lambda C}{\partial\lambda} + \frac{\partial wC}{\partial z}(7.11)$$

Si l'on utilise l'approximation hydrostatique, on remplacera 7.9 par

$$\frac{\partial q}{\partial z} - b \tag{7.12}$$

et l'on devra négliger  $2\Omega w \cos \lambda$  dans la composante de la force de Coriolis afin de garantir que le force de Coriolis ne produise par de travail mécanique. Notons que le fait de remplacer r par la valeur moyenne assure en fait que le moment cinétique  $H = \Omega a^2 \cos^2 \lambda + a \cos \lambda u$  satisfait dans le cas non-visqueux

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial q}{\partial \phi} \tag{7.13}$$

ce qui est cohérent avec la conservation du moment cinétique dans le système initial ??-7.4.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>  $F_{\phi}, F_{\lambda}, F_{r}$  sont les forces de friction agissant au sein du fluide.

### 7.1. CHANGEMENT DE COORDONNÉES

Si les forces de friction la térales sont modélisés par une diffusion sur des surfaces z=constant elles s'écrivent

$$\frac{F_u}{\rho_0} = \frac{1}{a^2 \cos^2 \lambda} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \kappa \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{a^2 \cos \lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \kappa \cos \lambda \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) + \kappa \left( \frac{1 - \tan^2 \lambda}{a^2} u - 2 \frac{\sin \lambda}{a^2 \cos^2 \lambda} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right)$$
(7.14)

$$\frac{F_v}{\rho_0} = \frac{1}{a^2 \cos^2 \lambda} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \kappa \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{a^2 \cos \lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \kappa \cos \lambda \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \kappa \left( \frac{1 - \tan^2 \lambda}{a^2} v + 2 \frac{\sin \lambda}{a^2 \cos^2 \lambda} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right)$$
(7.15)

alors que pour les scalaires, nous avons

$$\frac{F_C}{\rho_0} = \frac{1}{a^2 \cos^2 \lambda} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \kappa_C \frac{\partial C}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{a^2 \cos \lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \kappa_C \cos \lambda \frac{\partial C}{\partial \lambda} \right)$$
(7.16)

#### Coordonnées curvilignes orthogonales

Les deux systèmes de coordonnées présentés jusqu'ici, c'est-à-dire les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques ne sont en fait qu'un cas particulier d'un système de coordonnées plus général qui sont les coordonnées curvilignes orthogonales. Comme nous avons supposé que la troisième composante est une composante verticale, n'importe quel système de coordonnées latérales qui reste sur une surface d'une sphère est toujours perpendiculaire à la composante verticale. Si, sur cette surface sphérique, les deux coordonnées latérales sont en plus orthogonales entre elles, nous aurons un système de coordonnées orthogonal. Par conséquent, dans les modèles d'océans, on se limite généralement à créer des coordonnées curvilignes orthogonales dans un système bidimensionnel, la troisième composante étant toujours la composante verticale. A partir du moment où l'on sait créer un système de coordonnées curvilignes orthogonales, la transformation mathématique des équations ne pose pas de problème majeur puisque les opérateurs classiques de divergence, gradient, ... peuvent s'écrire de la façon suivante :

Dans ces formulations, nous voyons apparaître des termes métriques H1,H2 et H3. Dans un système de coordonnées curvilignes donné analytiquement, ces métriques peuvent être calculés explicitement alors que dans un système de coordonnées curvilignes généré numériquement, ces métriques doivent évidemment être évalués de façon numérique.

$$\nabla A = \frac{\mathbf{a}_1}{h_1} \frac{\partial A}{\partial \chi_1} + \frac{\mathbf{a}_2}{h_2} \frac{\partial A}{\partial \chi_2} + \frac{\mathbf{a}_3}{h_3} \frac{\partial A}{\partial \chi_3}$$
(7.17)

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \chi_1} h_2 h_3 F_1 + \frac{\partial}{\partial \chi_2} h_1 h_3 F_2 + \frac{\partial}{\partial \chi_3} h_1 h_2 F_3 \right]$$
(7.18)

$$\nabla^2 A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \chi_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial A}{\partial \chi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \chi_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial A}{\partial \chi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \chi_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial A}{\partial \chi_3} \right) \right]$$
(7.19)

$$\boldsymbol{\nabla}\Lambda\,\mathbf{F} = \frac{\mathbf{a}_1}{h_2h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_3F_3 \right) - \frac{\partial}{\partial\chi_3} \left( h_2F_2 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_2}{h_3h_1} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_3} \left( h_1F_1 \right) - \frac{\partial}{\partial\chi_1} \left( h_3F_3 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_1} \left( h_2F_2 \right) - \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_1} \left( h_2F_2 \right) - \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_1} \left( h_2F_2 \right) - \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_1} \left( h_2F_2 \right) - \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_1} \left( h_2F_2 \right) - \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) - \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) - \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) - \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) - \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial\chi_2} \left( h_2F_2 \right) \right] + \frac{\mathbf{a}_$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}\chi_1}{\mathrm{d}t}\frac{\partial A}{\partial\chi_1} + \frac{\mathrm{d}\chi_2}{\mathrm{d}t}\frac{\partial A}{\partial\chi_2} + \frac{\mathrm{d}\chi_3}{\mathrm{d}t}\frac{\partial A}{\partial\chi_3}$$
(7.21)

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\nu_1}{h_1} \frac{\partial A}{\partial \chi_1} + \frac{\nu_2}{h_2} \frac{\partial A}{\partial \chi_2} + \frac{\nu_3}{h_3} \frac{\partial A}{\partial \chi_3} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) A$$
(7.22)

Notons qu'ici les composantes du vecteur vitesse sont exprimées le long des lignes de coordonnées et que la divergence du vecteur vitesse s'exprime sous la forme d'une divergence dans le nouveau système de coordonnées. Cette propriété est particulièrement intéressante pour remettre les équations écrites sous forme de dérivées matérielles vers une forme dite conservative. A partir du moment où l'on sait évaluer les métriques et que l'on connaisse la position des lignes de coordonnées, l'écriture d'un modèle en coordonnées curvilignes ne pose pas de problème majeur mais possède certains avantages. Ainsi, par exemple, on peut faire en sorte que les lignes de coordonnées suivent au mieux une côte ou une rupture de pente au Plateau Continental. De même, les coordonnées peuvent être resserrées aux endroits intéressants comme les détroits ou les embouchures de rivières importantes. De cette façon, on génère donc une résolution numérique a priori mieux adaptée aux échelles physiques que l'on espère résoudre. Cette approche est cependant limitée dans ces possibilités par le fait que l'on ne peut pas générer des coordonnées curvilignes orthogonales quelconques dans la mesure où les coordonnées doivent rester orthogonales. Cela pose un problème si l'on essaie de faire correspondre une des coordonnées à une côte relativement erratique. Dans ce cas, la ligne de coordonnées perpendiculaire à cette dernière posera problème. En effet, numériquement, nous devons garder des systèmes de coordonnées discrètes, c'est-à-dire que l'on donnera les lignes de coordonnées à des intervales donnés. En observant la figure ?????? on peut se convaincre facilement de la difficulté de générer une coordonnée perpendiculaire à une ligne erratique qui fait en sorte que le changement de coordonnées reste univoque. En effet, aux endroits de forte variation de la première coordonnée, la deuxième a tendance à croiser cette ligne dès que l'on s'écarte de la côte. En pratique, cela signifie que les coordonnées curvilignes générées numériquement doivent être relativement lisses quand on passe d'un point discret au suivant. Cela veut également dire que dans la plupart des cas, la topographie sera partiellement représentée par un masque 'terre-mer' puisqu'il sera, en général, impossible de suivre correctement la côte tout en ayant un système de coordonnées orthogonales. Une autre difficulté pratique est bien entendu la nécessité d'avoir un pré-traitement et post-traitement des données qui permette de passer de la grille numérique curviligne vers un système de coordonnées cartésiennes ou sphérique pour une analyse des résultats ou une préparation de données. Aussi la génération, elle même, des coordonnées curvilignes demande généralement l'utilisation d'un outil de pré-traitement qui génère les coordonnées en fonction d'un critère défini a priori.

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_1}\right)^2 (7.23)$$

 $= h_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_2}\right)^2 h_3 = 1$  La coordonée vertical nétant pas changée à ce stade(7.24)

$$ds^{2} = h_{1}^{2}d\xi_{1} + h_{2}^{2}d\xi_{2} + h_{3}^{2}d\xi_{3}$$
(7.25)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{h_2 h_3 u_1}{\partial \xi_1} \frac{h_1 h_3 u_2}{\partial \xi_2} + \frac{h_1 h_2 u_3}{\partial \xi_3} \right) (7.26)$$

### Coordonnées non-orthogonales

Etant donné la difficulté des coordonnées orthogonales pour pouvoir suivre des variations rapides des frontières, des coordonnées curvilignes non-orthogonales pourraient être utilisées.

Dans ce cas, on peut effectivement choisir la deuxième coordonnée non orthogonale à la première qui, elle, suivra la côte, alors que la deuxième pourra être choisir librement sous la seule condition de garder un système de coordonnées dont la transformation est univoque.

Cependant, dès que l'on se libère de la condition d'orthogonalité, plusieurs difficultés apparaissent. Une première difficulté est le choix de la représentation des coordonnées des vecteurs. En effet, nous aovns le choix entre les composantes covariantes ou contravariantes comme indiqué à la figure ???? Aussi l'expression des opérateurs mathématiques devient nettement plus compliquée que dans le cas des coordonnées orthogonales. Cette complication des opérateurs mathématiques se ressent évidemment au niveau de l'implantation numérique dans la mesure où le nombre d'opérations à effectuer devient plus important ainsi que les sources d'erreurs de troncature. Aussi, satisfaire numériquement les propriétés mathématiques telles que la divergence d'un rotationnel qui vaut 0 ou le rotationnel d'un gradient qui vaut toujours 0 devient de plus en plus difficile à satisfaire numériquement. Nous retrouvons également les difficultés de pré-traitement et post-traitement ainsi que la nécessité d'un bon outil de génération des coordonnées curvilignes.

En océanographie, il n'y a, à notre connaissance, aucun modèle travaillant en coordonnées curvilignes non-orthogonales puisque, avec ce niveau de complexité, les modélisateurs préfèrent généralement se limiter à des coordonnées curvilignes orthogonales dans la formulation mathématique, mais ensuite, dans la résolution numérique, passer à des résolutions par des éléments finis ou des volumes finis qui, eux, peuvent avoir des positions quelconques dans le système de coordonnées choisi.

A ce stade-ci, il est bon aussi de rappeler que le choix du système de coordonnées n'est qu'une préparation à la discrétisation dans le sens où, mathématiquement, on ne fait que réécrire les équations dans un autre système. Ensuite, il faudra les résoudre et c'est ici que l'on peut exploiter la formulation dans un système de coordonnées donné en y distribuant des points discrets de façon uniforme. Dans ce cas, les opérateurs mathématiques sont en effet facilement approximés par des différences finies par exemple.

### 7.1.2 Coordonnée verticale

Coordonnée géopotentielle

Coordonné<br/>é $\sigma$ 

Coordonnée isopycnale

Coordonnée hybride

### 7.2 Placement d'une grille numérique

### 7.2.1 Grille discrète

### Structurée

#### Non-structurée

#### Spectrale

Un problème revers de la structuration globale de la solution est introduite quand des gradients importants sont présents. On assiste alors à des phénomènes de Gibbs indésirables. Aussi, si nous avons par exemple une situation où une variable d'état c change d'un valeur de c = 10 'a une valeur de 1, toute erreur de 10 % dans la <sup>9</sup>egion c = 10 risque de se propager (par les fonctions globales) et d'induire une erreur de 100% dans l'autre région. Ceci peut être catastrophique si ce sont justement les régions à faible valeurs qui sont dynamiquement importantes.

Dans le cas des océans, nous avons également le problème de la présence des îles et côtes.

### Non-Structurée

tirangulaires ou quadrilatères horizontalement lignes verticales, ou vrais elements

#### Autres

mélange spectrale, non-structuree

cartnormCartesian grid cartstreStretched cartesian grid curvorthOrthogonal curvilinear grid curvnonoNon-orthogonal curvilinear grid triangulUnstructured grid

vertcsigvertical coordinate vertczz coordinates

Notons que la discretisation des opérateur de diffusion horizontale n'a pas suscité beaucoup d'analyses, puisque d'une part le terme est généralement petit et l'on espère que le caractère diffusif ne pose pas de problème lors de la discrétisation. Cependant, avec des grilles de plus en plus fines d'une part et des opérateurs de "diffusion" de plus en plus "étranges" on doit remettre en question ce paradigme. Ainsi, plusieurs problèmes peuvent apparaître: L'opérateur mathématique lui même ne donne pas lieu à une solution définie positive. L'opérateur biharmonique en est l'exemple le plus classique. Ajoutter un limiteur de flux à cet opérateur rend le schéma manifestement non consistant???

Si l'opérateur mathématique lui même est défini positif, il n'en est pas nécessairement pour son équivalent discret (dans l'espace). Ceci est bien connu pour l'opérateur harmonique dans une grille numérique fortement déformée [].


**Figure 7.2 :** Arakawa A-Grid with positions of  $\eta$  points (•) and u and v points ( $\diamondsuit$ ) at the same location.



**Figure 7.4 :** Arakawa C-Grid with positions of  $\eta$  points (•) in the centre of the grid box and u (>) and v points ( $\wedge$ ) at the interfaces.

## 7.2.2 Grilles horizontales décentrées

- 1. A grid
- 2. B grid
- 3. C grid
- 4. D grid
- 5. E grid
- 6. Z grid
- 7. others

## 7.2.3 Grilles verticales décentrées

### 7.2.4 Discrétisation temporelle

Attention au problème mémoire



**Figure 7.3 :** Arakawa B-Grid with positions of  $\eta$  points (•) in the centre of the grid box and u and v points ( $\diamondsuit$ ) at the corners.



**Figure 7.5 :** Arakawa D-Grid with positions of  $\eta$  points (•) in the centre of the grid box and u (>) and v points ( $\wedge$ ) at the interfaces.



**Figure 7.6 :** Arakawa E-Grid with positions of  $\eta$  points (•) and u and v points ( $\diamondsuit$ ) at the same location. u, v and x, y coordinates are at  $45^{\circ}$ .

#### Leapfrog

**Euler explicite** 

**Euler implicite** 

**Forward-Backward** 

Pas fractionnés

Autres

## 7.2.5 Pression de surface

Toit rigide, fonction de courant

Toit rigide, pression

Surface libre mode splitting

Surface libre implicite

#### 7.2.6 Schémas d'advection

Upwind

Centré

Second ordre

**QUICK-QUICKEST** 

PPM

**Limiteurs TVD** 

**Flux-corrected** 

Semi-lagrangien

7.2.7 Force de Coriolis

7.2.8 Equation d'état



Figure 7.7 : Z-Gridfordiver-<br/>models.gence/vorticitymodels.with positions of divergence $\div$  points and vorticity points $(\diamondsuit)$  at the corners.

# **Chapter 8**

**Méthodes Lagrangiennes** 

# 8.1 Advection-dispersion

Comme un fluide non-homogène est constitué d'une série de constituants, nous pouvons en principe calculer l'évolution de la concentration  $c^a$  d'un de ses constituants *a* par l'équation suivante

$$\frac{\partial \rho c^{a}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho c^{a} \mathbf{v}\right) = \rho Q^{a} - \nabla \cdot \left(\rho c^{a} \mathbf{m}^{a}\right) - \nabla \cdot \mathbf{d}^{a}, \tag{8.1}$$

$$\mathbf{d}^a = -\rho \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\nabla} c^a. \tag{8.2}$$

Cette équation n'exprime rien d'autre que le fait que le traceur est advecté par le courant v, modifié par les sources locales  $Q^a$ , de même que modifié par la circonstance que la vitesse du constituant n'est pas identique à la vitesse du mélange. Cette différence peut être systématique (migration, sédimentation: m<sup>a</sup>) ou erratique. Dans ce dernier cas, on globalise l'effet dans un flux de diffusion d<sup>a</sup> exprimé comme étant le produit d'un tenseur de diffusion K et du gradient du traceur en question. Dans la mesure où le tenseur de diffusion (ainsi que les termes sources et aux frontières, bien entendu) est connu<sup>1</sup> pour le traceur en question, rien n'empêche d'étudier la dispersion/advection du traceur par l'équation (8.1). Si le traceur n'influence pas la circulation, le vecteur vitesse v est déterminé par l'hydrodynamique et le traceur  $c^a$  est dynamiquement passif. On peut alors supposer le courant connu. Comme pour l'hydrodynamique proprement dite, ici, nous pouvons également utiliser l'approximation de Boussinesq en remplaçant  $\rho$  par sa valeur de référence  $\rho_0$  constant.

## 8.2 Advection-dispersion d'une nappe

Il y a des cas où l'étude des équations d'advection-diffusion complète peut être remplacée par la superposition d'une solution qui consiste en une advection globale et d'une dispersion autour du centre de masse du constituant. Typiquement, pour un rejet accidentel en mer, une nappe de polluant va être entraînée par les courants moyens avec, en superposition, une dispersion autour du centre. Si nous voulons suivre l'évolution d'une nappe constituée d'un seul traceur c qui n'interagit pas avec d'autres traceurs et ne disparaît que par mortalité ou décomposition propre avec un temps caractéristique T (Q = -c/T), nous avons

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (c \mathbf{v}) = -\frac{c}{T} - \boldsymbol{\nabla} \cdot (c \mathbf{m}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\nabla} c), \qquad (8.3)$$

La dispersion autour du centre peut être provoquée par des fluctuations de vitesses à haute fréquence (la marée dans un écoulement à grande échelle par exemple) ou une vitesse engendrée par une dynamique propre de la nappe (les hydrocarbures ont une tension superficielle et un comportement non-newtonien). Pour traiter ces cas, nous pouvons décomposer le courant en sa partie "moyenne"<sup>2</sup>  $\mathbf{u}_0$  et une fluctuation  $\mathbf{u}_1$ .

En séparant de la même manière la concentration en sa partie moyenne et les fluctuations, nous aboutirons, bien entendu, au problème classique de fermeture associé aux termes non-linéaires *cv*. La paramétrisation se fera alors de façon similaire aux fermetures turbulentes, mais il faudra

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Pour la turbulence classique isotrope, le tenseur de diffusion s'écrit simplement  $\mathbf{K} = \kappa \mathbf{I}$ , où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité et  $\kappa$  la diffusion turbulente.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>La moyenne peut également être une moyenne d'ensemble sur un grand nombre de réalisations fictives du rejet. Dans ce cas, on n'est pas interessé par la forme réelle de la nappe pour un rejet donné, mais bien par la forme moyenne ou ayant la plus forte probabilité d'occurence. Les vitesses  $u_1$  sont alors les écarts du vecteur vitesse réel par rapport à un écoulement moyen hypothétique.

#### 8.2. ADVECTION-DISPERSION D'UNE NAPPE

être conscient du fait que les fluctuations de vitesses peuvent être relativement cohérentes (marées, par exemple) et qu'une loi de diffusion simple peut s'avérer inadéquate. La marée mélangera davantage dans la direction de l'axe principale de l'ellipse de marée que dans la direction perpendiculaire. De même, le coefficient de diffusion du mélange peut dépendre de l'échelle de la solution en raison des taux de transfert d'énergie différents entre échelles. En désignant par c la concentration moyenne, nous avons alors la paramétrisation suivante

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (c \mathbf{u}_0) = -\frac{c}{T} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\mathsf{K}}^* \cdot \boldsymbol{\nabla} c), \qquad (8.4)$$

où l'on omet généralement la migration propre devant l'écoulement moyen. Le tenseur de diffusion  $\mathbf{K}^*$  contient ainsi l'effet de mélange par les fluctuations  $\mathbf{u}_1$  ainsi que la turbulence proprement dite.

Si la "moyenne" est définie sur des échelles spatiales ou temporelles suffisamment grandes, nous pouvons admettre que localement, le vecteur vitesse  $u_0$  est quasi-constant. En effectuant le changement de variables suivant

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \int_{t_0}^t \mathbf{u}_0 \mathrm{d}t,\tag{8.5}$$

$$\tilde{t} = t,$$
 (8.6)

$$\tilde{c} = c \exp\left(\frac{\tilde{t}}{T}\right),$$
(8.7)

les équations se transforment en

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \left( \mathbf{K}^* \cdot \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \tilde{c} \right), \tag{8.8}$$

où  $\tilde{\nabla}$  est l'opérateur classique dans le nouveau système de coordonnées.

L'avantage de ce procédé par rapport à une résolution directe dans les coordonnées classiques est la possibilité de suivre un rejet ponctuel avec une dispersion autour du centre de masse de la nappe. Il est en effet souvent possible de modéliser cette dispersion autour du centre de la nappe par une loi qui s'exprime naturellement en coordonnées polaires locales, avec un coefficient de diffusion dépendant de l'échelle r et du temps.

Comme illustration, pour une diffusion isotrope dans un problème bidimensionel, le coefficient de diffusion  $\kappa = \lambda(t)r^q$ , donne lieu à l'équation suivante

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r^{q+1} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial r} \right), \tag{8.9}$$

dont la solution<sup>3</sup> pour un rejet d'une quantité C à l'instant initial est [?]

$$\tilde{c}(t,r) = \frac{2-q}{2\pi} \frac{C}{\Gamma(p)} \sigma(t)^p \exp\left[-\sigma(t)r^{2-q}\right], \quad p = \frac{2}{2-q},$$
(8.10)

$$\sigma^{-1} = (2-q)^2 \int_0^t \lambda dt.$$
 (8.11)

Cette solution possède plusieurs paramêtres de calibrage  $q, \lambda$  et a été utilisée pour expliquer avec succès des rejets observés dans différents sites.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>La recherche de la solution peut se faire en essayant une solution de similitude du type  $c = a(t) \exp[-\sigma(t)r^m]$ . Ensuite, une solution de similitude demande que les mêmes puissances de r apparaissent, ce qui détermine m. Les fonctions a(t) et  $\sigma(t)$  s'obtiennent alors en annulant les coefficients des différentes puissances de r.



Figure 8.1 : Advection d'une nappe et dispersion par les fluctuations.

# 8.3 Rejets ponctuels, solutions générales

Au lieu de suivre un rejet, on peut aussi étudier le déversement permanent ou intermittent en un lieu donné. Pour trouver la solution de ce problème, il suffit de superposer les solutions individuelles des rejets instantanés par une intégrale de convolution. En effet, le rejet instantané nous fournit la fonction de Green pour un rejet ponctuel variable. Strictement parlant, nous devrions tenir compte, à proximité du rejet ponctuel, de l'apport de masse local dans la définition de la masse volumique et de la quantité de mouvement d'un mélange. De la sorte, la divergence locale du vecteur vitesse pour un mélange incompressible ne serait plus nulle à l'endroit du rejet. Nous supposerons cependant que la quantité du traceur rejeté (ou une quantité d'eau supplémentaire par les égouts, par exemple) est négligeable par rapport au transport local par le courant. Dans ce cas, nous ne sommes pas non plus obligés de résoudre de façon détaillée un rejet forcé, mais pouvons étudier la dispersion telle qu'engendrée par le courant. Nous supposerons ici que le tenseur de diffusion  $\mathbf{K}^* = \kappa \mathbf{I}$  est constant et isotrope, ce qui suppose que les fluctuations de vitesses sont relativement faibles ou peu structurées. Nous pouvons alors rendre les équations adimensionnelles<sup>4</sup> par les variables suivantes

$$\tilde{t} = \frac{t}{4\kappa \|\mathbf{u}\|^{-2}},\tag{8.12}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{4\kappa \|\mathbf{u}\|^{-1}},\tag{8.13}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|},\tag{8.14}$$

$$\gamma = \frac{4\kappa}{T \|\mathbf{u}\|^2}.$$
(8.15)

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Nous supposons également le vecteur vitesse constant; ceci n'est pas indispensable mais simplifie la présentation.



**Figure 8.2 :** Concentration du traceur c pour un rejet unitaire instantané à l'origine. Evolution pour t = 0.3, 1, 3. (exemple sans décroissance radioactive et avec une advection unitaire vers les x croissants).

Les équations adimensionnelles s'écrivent alors (en omettant les ) pour un terme rejet d'intensité q

$$\frac{\partial c}{\partial t} = q - \gamma c - \mathbf{v} \cdot \nabla c + \frac{1}{4} \nabla^2 c.$$
(8.16)

La solution pour le rejet instantané  $q(\mathbf{x},t) = Q\delta(\mathbf{x})\delta(t)$  nous fournira la fonction de Green. Pour une concentration initialement nulle en t = 0, la concentration ultérieure est donnée par

$$c(\mathbf{x},t) = \frac{Q}{\sqrt{\pi t^n}} \exp\left[\frac{-(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)^2}{t}\right] \exp\left(-\gamma t\right),\tag{8.17}$$

où n = 1 pour un problème uni-dimensionnel, n = 2 en 2D, et n = 3 en 3D.

Cette solution est illustrée en 1D sur la figure 8.2. On y voit clairement l'advection ainsi que la diffusion atténuant la concentration maximale avec le temps.

Nous pouvons vérifier sans peine que la solution (8.17) donne lieu à une masse totale (il suffit d'intégrer sur le domaine) qui vaut  $q \exp[-\gamma t]$  et tient compte de la disparition de la masse par le terme  $\exp[-\gamma t]$ .

A partir de la solution pour le rejet instantané ponctuel, nous pouvons construire la solution pour un rejet quelconque par superposition. Autrement dit, nous pouvons additionner les contributions des solutions de rejets du type Dirac, en prenant soin de décaler la solution dans le temps et l'espace. A cette fin, nous pouvons définir la fonction de Green

$$c(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = \frac{Q}{\sqrt{\pi(t - t')^n}} \exp\left[\frac{-\{\mathbf{x} - \mathbf{x}' - \mathbf{v}(t - t')\}^2}{t - t'}\right] \exp\left(-\gamma(t - t')\right),$$
(8.18)

qui donne la solution pour un rejet effectué en x', t'. La solution pour un rejet quelconque est alors

$$c(\mathbf{x},t) = \int_{R^n} \int_0^t \frac{q(\mathbf{x}',t')}{\sqrt{\pi(t-t')^n}} e^{\left[\frac{-\{\mathbf{x}-\mathbf{x}'-\mathbf{v}(t-t')\}^2}{t-t'} - \gamma(t-t')\right]} dt' d\mathbf{x}'.$$
(8.19)

Nous pouvons vérifier que si la source est indépendante d'une coordonnée perpendiculaire au vecteur vitesse, nous pouvons ramener le problème de l'espace  $R^n$  à un espace  $R^{n-1}$ . En effet, si

la source est indépendante de la coordonnée  $x_i$  avec  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + x_i \mathbf{e_i}$ ,  $\mathbf{e_i} \cdot \mathbf{v} = 0$ ,  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{e_i} = 0$ , nous avons

$$\int_{R^{n}} q(\mathbf{x}', t') \exp\left[\frac{-\{\mathbf{x} - \mathbf{x}' - \mathbf{v}(t - t')\}^{2}}{t - t'}\right] d\mathbf{x}' = \int_{R^{n-1}} q(\mathbf{X}', t') \exp\left[\frac{-\{\mathbf{X} - \mathbf{X}' - \mathbf{v}(t - t')\}^{2}}{t - t'}\right] d\mathbf{X}' \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(x_{i} - x_{i}')^{2}/(t - t')] dx_{i}' = (8.20)$$

$$\sqrt{\pi(t - t')} \int_{R^{n-1}} q(\mathbf{X}', t') \exp\left[\frac{-\{\mathbf{X} - \mathbf{X}' - \mathbf{v}(t - t')\}^{2}}{t - t'}\right] d\mathbf{X}',$$

de sorte que nous retrouvons la solution (8.17) en  $R_{n-1}$ .

### 8.3.1 Rejet ponctuel

Si le rejet reste ponctuel dans l'espace mais varie dans le temps  $q(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})Q(t)$  et la solution générale se simplifie en

$$c(\mathbf{x},t) = \int_0^t \frac{Q(t-t')}{\sqrt{\pi t'}} \exp\left[\frac{-(\mathbf{x}-\mathbf{v}t')^2}{t'}\right] \exp\left[-\gamma t'\right] dt'.$$
(8.21)

En général, la forme analytique des solutions n'est disponible que pour des fonctions de rejet particulières. Pour le rejet permanent par exemple, la solution stationnaire peut être obtenue en faisant tendre  $t \to \infty$ 

1D

$$c = \frac{q}{\sqrt{1+\gamma}} \exp[2x - 2\sqrt{1+\gamma}|x|].$$
 (8.22)

**2D** 

$$c = \frac{q}{\pi} \exp[2\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}] 2K_0 \left( 2\sqrt{1+\gamma} \|\mathbf{x}\| \right).$$
(8.23)

Ainsi, une source ponctuelle d'un traceur en 2D donne lieu à un équilibre entre le terme d'advection et diffusion avec, bien entendu, une concentration du traceur plus élevée en aval du courant.

**3D** 

$$c = \frac{q}{\pi} \exp[2\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}] \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \exp[-2\sqrt{1+\gamma} \|\mathbf{x}\|].$$
(8.24)

# 8.4 Traceurs en océanographie

En océanographie les traceurs étudiés sont multiples : polluants accidentels, isotopes radioactifs, composants biologiques etc. .Souvent les traceurs sont utilisés pour identifier les échelles spatiales physiques (gyres), le parcours des masses d'eau (si l'on connaît les endroits de rejet), voire l'âge des constituants (si l'on connaît les dépôts de matières radioactives de temps de décroissance différents, le rapport des concentrations des traceurs en question donne une indication du temps écoulé depuis leur dépôt. De même, des transformations d'un isotope en un autre peuvent servir à



**Figure 8.3 :** Concentration du traceur c en 2D autour du rejet en (0,0). L'advection a lieu vers la droite. Les faibles valeurs sont en noir, les valeurs élevées en blanc.

la datation). D'autres applications concernent les calculs probabilistes d'occurrence de pollutions, en un endroit donné, en fonction des probabilités de rejets accidentels, en un autre endroit et les conditions météorologiques/océanographiques habituelles ou extrêmes. La plupart de ces calculs sont cependant effectués par des modèles numériques étant donné la variabilité des géométries et des forçages.

# 8.5 Dispersion Lagrangienne

A la place de l'approche Eulerienne utilisée jusqu'à présent, il est fréquent de faire appel à une autre approche pour traîter les problèmes de dispersion de traceurs. Il s'agit de méthodes lagrangiennes qui ont, bien entendu, comme philosophie de suivre les parcours individuels de particules de traceurs dans l'écoulement.

Si l'écoulement est purement advectif, il suffit bien sûr d'intégrer les trajectoires de particules. Par contre, si une diffusion est présente, il faut que les particules qui bougent avec le courant moyen puissent aussi subir l'effet des fluctuations de vitesses responsables de la diffusion. Il s'agit donc de trouver un moyen d'ajouter des fluctuations de vitesses, soit en exploitant une connaissance approfondie de la physique de ces fluctuations, soit en cherchant une loi de fluctuation qui restitue une loi de diffusion choisie dans le système Eulerien.

Nous allons, dans la suite, montrer quel est le lien entre les méthodes Eulériennes et Lagrangiennes.

#### 8.5.1 Approche discrète

L'exemple le plus connu d'un calcul de trajectoire dans un environnement avec fluctuations erratiques n'est pas sans rappeler le mouvement Brownien ou du *random walk*.

Dans un premier temps, nous pouvons analyser un cas uni-dimensionnel. Supposons qu'une particule à un moment donné peut soit avancer d'un pas  $\Delta x$  avec une probabilité p, soit reculer d'un pas  $\Delta x$  avec une probabilité 1 - p. Si on largue une particule de ce type en x = 0 et si on lui laisse faire n pas, nous pouvons calculer la probabilité que la particule se trouve en un point discret  $m\Delta x$  donné, m étant un nombre entier positif ou négatif. En effet, au total, la particule a effectué n pas (m doit donc être compris entre -n et n), dont k vers les x positifs et par conséquent, n - k dans la direction négative. Si chaque pas est aléatoire et indépendant des autres, la probabilité de faire k pas positifs n'est rien d'autre que la probabilité de tirer kboules rouges, lors d'une série de n tirages non exhaustifs, en dehors d'une population de boules où le nombre de boules rouges R est lié au nombre de boules noires N par p = R/(R + N). L'ordre d'arrivée des boules rouges n'ayant pas d'importance (faire deux pas en avant, puis un en arrière équivaut à faire un pas en avant, un en arrière et finalement, un en avant). Le calcul de la probabilité d'obtenir k boules rouges est la probabilité d'obtenir k boules rouges et n - kboules noires dans un ordre déterminé, multiplié par le nombre de possibilités d'ordre d'arrivées différents. La probabilité d'obtenir k boules rouges et n-k boules noires dans un ordre déterminé est simplement obtenue par le théorème des probabilités composées :  $p^k(1-p)^{(n-k)}$ . Le nombre possible d'ordres d'arrivées différents amenant k boules rouges est le nombre de permutations avec répétitions de n éléments répartis en deux espèces de k et n - k éléments :  $C_n^k$ .

Dès lors, nous obtenons la probabilité de trouver k boules rouges parmi une série de n tirages exhaustifs, quel que soit l'ordre d'arrivée des boules

$$p_k^n = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, (8.25)$$

ce qui constitue la loi binomiale. La probablité d'arriver en un point  $x = m\Delta x$  donné se calcule alors facilement : pour arriver en m, il faut que les k pas positifs se combinent avec les n - k pas négatifs pour amener le point en  $m\Delta x$  :

$$k\Delta x - (n-k)\Delta x = m\Delta x \tag{8.26}$$

soit 2k = m + n. Ceci détermine la valeur de k et nous connaissons la probabilité d'occurrence de cet événement. Il faut noter que si m + n est un nombre impair, la probabilité est nulle, car on ne peut arriver avec un nombre pair de pas totaux en un endroit de coordonnée discrète impaire, puisque l'on oblige la particule de bouger à chaque pas. Afin de contourner le fait que k ne serait pas entier, nous pouvons calculer la probabilité que la particule se trouve au point m ou m + 1. Les deux étant mutuellement exclusifs et la probabilité d'un des deux étant nulle (selon que m + nest pair ou impair), la probabilité d'avoir la particule en m ou m + 1 est

$$p_k^n = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, (8.27)$$

où k est le nombre entier défini par 2k = m + n. (Bien sûr, si m < -n ou m > n, la probabilité est nulle).

En observant la forme de la fonction de distribution (figure 8.4), nous pouvons remarquer que, pour  $np(1-p) \gg 10$ , elle ressemble fortement à la courbe gaussienne. Dans ce cas, il est possible de démontrer que

$$\sum_{k=a}^{b} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{b+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}} e^{-z^2/2} \mathrm{d}z,$$
(8.28)



Figure 8.4 : Histogramme des positions discrètes obtenues après 100 itérations d'un random walk discret pour 100, 500 et 2500 particules.

de sorte que la probabilité P(m, n) d'avoir la particule en  $x = m\Delta x$  ou  $x = (m + 1)\Delta x$  après n pas est

$$P(m,n) \sim \frac{1}{\sqrt{np(1-p)2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}, \quad 2k = m+n.$$
 (8.29)

Si p = 1/2, nous avons alors

$$P(m,n) \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$
 (8.30)

Si nous identifions n comme étant relié au temps  $t = n\Delta t$  et m à l'espace  $x = m\Delta x$ , nous retrouvons la solution d'une dispersion autour d'un rejet ponctuel en faisant décroître  $\Delta x$  et  $\Delta t$ , avec des définitions adéquates pour les échelles de temps et d'espace en fonction du coefficient de dispersion ( $\Delta x^2 \sim \kappa \Delta t$ ). Pour obtenir cette correspondance, il suffit d'imaginer que le rejet est un rejet instantané d'un grand nombre de particules. La concentration n'est alors rien d'autre que le nombre total de particules multiplié par la probabilité P(m, n) divisé par  $\Delta x$ .

L'approche purement discrète pourrait aussi être adaptée à une situation avec une advection, mais nous préférons passer à une représentation continue des fluctuations.

#### **8.5.2** Approche continue

Ici, l'idée générale est de faire subir à la particule un déplacement qui est la superposition d'une advection déterministe et d'une fluctuation erratique

$$dx = adt + b\xi(t)dt, \tag{8.31}$$

où  $\xi(t)$  est une fonction aléatoire. Cela signifie que pour  $t \neq t'$ ,  $\xi(t)$  et  $\xi(t')$  sont statistiquement indépendants. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que la moyenne  $\langle \xi \rangle$  est nulle. Dans le cas où cela ne serait pas le cas, il suffirait d'inclure cette moyenne dans la définition de a.

La fonction aléatoire  $\xi(t)$  possède une autocorrélation nulle pour tout  $t \neq t'$  et une variance infinie

$$\langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t'). \tag{8.32}$$

On associe à cette fonction  $\xi$  la notion de bruit blanc. En effet, le spectre de sa transformée de Fourier est plat, ce qui correspond à une lumière blanche dans le spectre des ondes visibles. Un bruit blanc parfait n'existe, bien entendu, pas en réalité, mais sera une schématisation utile pour les développements mathématiques. En pratique, tout bruit dont le spectre est suffissamment plat



**Figure 8.5 :** Illustration du processus de Wiener. 4 trajectoires  $x_i(t)$  générées par un bruit blanc et  $\langle (x_i(t) - x_j(t))^2 \rangle$  pour 10 et 100 particules.

dans la fenêtre spectrale qui définit le processus que l'on étudie peut être considéré comme un bruit blanc.

Un spectre plat infini indique également (par le théorème de Parseval) que la fonction  $\xi(t)$  possède une variance infinie, propriété qui pourrait poser problème dans le cadre du calcul différentiel ordinaire. Afin de pouvoir traîter le problème, il faut réaliser que l'important est le déplacement x

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t a dt + \int_{t_0}^t b\xi(t') dt'.$$
(8.33)

Il est alors intéressant de définir

$$W(t) = \int_{t_0}^t \xi(t') dt'.$$
 (8.34)

W(t) n'est rien d'autre que la fonction qui permet de calculer un *random walk* en une dimension. Cette fonction a été étudiée en détail par Wiener et porte son nom.

Bien que W(t) ne soit pas différenciable, nous pouvons formellement écrire

$$dW(t) \equiv W(t) - W(t - dt) = \xi(t)dt$$
(8.35)

en l'interprétant comme l'intégrale différentielle de  $\xi$ .

Une réalisation de trajectoires (figure 8.5) permet de constater que les trajectoires sont effectivement erratiques et que la distance entre les trajectoires croît comme  $\sqrt{t}$ .

dW possède les propriétés statistiques suivantes [?] résultant de l'indépendance statistique de W(t) et  $W(t + \Delta t)$ .

$$\langle \mathrm{d}W(t) \rangle = 0, \tag{8.36}$$

$$2\int_{t_0}^t W(t') dW(t') = W(t)^2 - W(t_0)^2 - (t - t_0)$$
(8.37)

$$\left\langle 2\int_{t_0}^t W(t')\mathrm{d}W(t')\right\rangle = \langle W(t)^2 \rangle - \langle W(t_0)^2 \rangle - (t-t_0)$$
(8.38)

#### 8.5. DISPERSION LAGRANGIENNE

$$\langle \mathrm{d}W(t)^2 \rangle = \mathrm{d}t. \tag{8.39}$$

Ceci peut bien sûr être interprété à la lumière du mouvement brownien où deux réalisations de trajectoires aléatoires voient la distance entre les deux particules augmenter comme  $\sqrt{t-t_0}$ .

On peut donc écrire

$$\int_{t_0}^t b\xi(t') dt' = \int_{t_0}^t b \, dW$$
(8.40)

Si les a et b sont des fonctions de x, t, alors on obtient des équations différentielles dites "équations différentielles stochastiques de Ito".

Leur manipulation mathématique doit se faire avec précaution.

En effet, si f(x) est une fonction qui dépend de x, où x satisfait

$$dx = a[x(t), t]dt + b[x(t), t]dW(t),$$
(8.41)

alors

$$df[x(t)] = f[x(t) + dx(t)] - f[x(t)] = dx(t) \frac{df}{dx} + \frac{1}{2} (dx(t))^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + O(d^3) = (adt + bdW) \frac{df}{dx} + \frac{1}{2} b^2 (dW)^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + O(d^3) df = \left(a \frac{df}{dx} + \frac{1}{2} b^2 \frac{d^2 f}{dx^2}\right) dt + b \frac{df}{dx} dW(t).$$
(8.43)

Pour l'obtenir, nous avons dû garder les termes quadratiques pour maintenir les fluctuations en  $(dW(t))^2 = dt$ .

Cette équation nous permet de déterminer l'évolution de la moyenne stochastique de f

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \frac{\mathrm{d}\langle f \rangle}{\mathrm{d}t} = \left\langle a \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \right\rangle,$$
(8.44)

puisque la moyenne des fluctuations stochastiques dW est nulle.

A ce stade, nous devons être attentifs à la densité de probabilité  $p(x, t|x_0, t_0)$ , qui donne la probabilité que la particule lâchée en  $x = x_0$  en  $t = t_0$  se trouve entre x et x + dx en t. Dans ce cas, pour une fonction f(x) qui dépend de la position x de la particule, on peut calculer la valeur la plus probable en un instant t donné (ou la valeur moyenne pour un grand nombre de réalisations)

$$\langle f \rangle = \int p(x,t|x_0,t_0)f(x)\mathrm{d}x.$$
 (8.45)

Ainsi, nous avons aussi

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \int \frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} f(x) \mathrm{d}x,$$
(8.46)

que nous pouvons transformer à l'aide de (8.44) en

$$\int \frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} f(x) \mathrm{d}x = \int \left(a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}b^2\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}\right) p(x,t|x_0,t_0) \mathrm{d}x.$$
(8.47)

Par une intégration par parties et en utilisant des conditions aux limites adéquates qui annulent les termes de surface [?], on obtient

$$\int \frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} f(x) dx = \int f(x) \left( -\frac{\partial a p(x,t|x_0,t_0)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b^2 p(x,t|x_0,t_0)}{\partial x^2} \right) dx.$$
(8.48)

Puisque la fonction f est que lconque, nous obtenons l'équation d'évolution pour la fonction de densité de probabilité p

$$\frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial a p(x,t|x_0,t_0)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b^2 p(x,t|x_0,t_0)}{\partial x^2}.$$
(8.49)

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Fokker-Planck. Elle permet donc de calculer la densité de probabilité  $p(x, t|x_0, t_0)$  qui donne la probabilité  $p(x, t|x_0, t_0)dx$  qu'une particule lâchée en  $x_0$  à l'instant  $t_0$  et dont la trajectoire est régie par (8.31) se trouve entre x et x + dx à l'instant t.

Nous sommes, à présent, en mesure de faire le lien avec l'advection-diffusion eulérienne. En effet, si nous imaginons un rejet d'un grand nombre N de particules régies par (8.31), ces particules auront une distribution  $Np(x, t|x_0, t_0)$ . Si nous voulons que cette distribution corresponde au résultat d'une advection-diffusion, il faudrait que cette distribution corresponde à la concentration d'un traceur rejeté en  $x_0, t_0$  et advecté-diffusé par l'équation

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(uc) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial c}{\partial x}\right). \tag{8.50}$$

Il s'ensuit que nous avons une équivalence si

$$a = u + \frac{\partial \kappa}{\partial x},$$
  

$$b = \sqrt{2\kappa}.$$
(8.51)

Notons qu'une interprétation trop superficielle de (8.31) aurait pu suggérer que *a* serait la vitesse d'advection et que *b* soit lié à l'intensité de la diffusion. Nous voyons à présent que *a* contient une contribution liée aux variations du coefficient de diffusion  $\kappa$ . Cela revient à dire que si on avait utilisé (8.31) avec a = u, on aurait simulé un écoulement dont la vitesse effective serait  $u - \partial \kappa / \partial x$ . Cette vitesse effective aurait alors tendance à concentrer les particules aux endroits de faible diffusion. Ceci peut être observé dans des modèles numériques lagrangiens dans lequels on ne tient pas compte de la correction en  $\partial \kappa / \partial x$ .

La fonction de Green (8.17) du problème eulérien continu n'est donc rien d'autre que la fonction de distribution de probabilité.

Notons que la généralisation à plusieurs dimensions s'écrit [?]

$$d\mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)dt + \mathbf{B} \cdot d\mathbf{W}(t),$$
  

$$\mathbf{a} = \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{K}),$$
  

$$\mathbf{B} \mathbf{B}^{T} = 2\mathbf{K}.$$
(8.52)

Finalement, on pourrait généraliser l'approche lagrangienne à des situations où les fluctuations ne sont pas complètement décorrélées. Pour illustrer cette possibilité, nous pouvons écrire

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v, \tag{8.53}$$

#### 8.5. DISPERSION LAGRANGIENNE

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\beta(v-a) + \beta b\xi(t). \tag{8.54}$$

Pour m = 0, nous retrouvons (8.31). Par contre, le paramètre m ajoute de l'inertie au système et fait en sorte que les fluctuations v - a seront corrélées dans le temps. Le terme  $\beta(v - a)$  peut être interprété comme un terme de friction qui s'oppose à ce qu'une particule glisse par rapport au courant non-stochastique a. Il est clair que le temps de corrélation (ou de relaxation) introduit de la sorte est  $\tau = m\beta^{-1}$ .

En pratique, on utilise l'approche présentée pour développer des modèles discrets Lagrangiens que nous allons esquisser dans la suite.

#### 8.5.3 Discrétisation

Dans les modèles numériques, on voudrait bien entendu remplacer les différentielles par des différences finies

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \int_{t}^{t + \Delta t} a[x(t'), t'] dt' + \int_{t}^{t + \Delta t} b \, dW.$$
(8.55)

Si l'on suppose que b ne varie pas de façon significative entre t et  $t + \Delta t$  ainsi qu'entre x et  $x(t + \Delta t)$ , on peut approximer le dernier terme par

$$\int_{t}^{t+\Delta t} b \, \mathrm{d}W = b[x(t), t](W(t+\Delta t) - W(t)).$$
(8.56)

Il suffit donc de savoir comment se comporte la fonction de Wiener qui est l'intégrale du bruit blanc. Etant donné que dW est une fonction aléatoire de distribution gaussienne d'écart type  $\sqrt{dt}$ , l'intégrale peut être approximée par

$$\int_{t}^{t+\Delta t} b \,\mathrm{d}W = b[x(t), t] \sqrt{\Delta t} \,r,\tag{8.57}$$

où r est une variable aléatoire de distribution gaussienne de moyenne nulle et d'écart type unitaire.

Si  $\Delta t$  est suffisamment petit par rapport au temps caractéristique de la solution cherchée, on peut remplacer l'utilisation de la distribution gaussienne en faisant appel au théorème de la limite centrale.

Théorème de la limite centrale : Si on considère une variable aléatoire X qui est la somme de nombreuses variables aléatoires  $X_i$  indépendantes<sup>5</sup> mais de distribution quelconque de moyenne nulle et d'écart type  $\sigma_i$ , alors la distribution de la variable aléatoire X est gaussienne de moyenne nulle et variance  $\sigma^2 = \sum_i \sigma_i^2$ , de sorte que la somme  $\sigma^{-1}(\sum_i X_i)$  possède une distribution gaussienne d'écart type unitaire.

Cela veut dire que, si le pas de temps est suffisamment petit pour que l'on effectue un grand nombre de pas pour suivre un signal temporel donné, la fonction aléatoire utilisée pour bouger les particules importe peu, pourvu que sa moyenne soit zéro et que son écart type soit  $\sqrt{(\Delta t)}$ , car dans ce cas, la combinaison de *n* pas élémentaires (non-gaussiens) correspondra à un pas de distribution gaussienne d'écart type  $\sqrt{(n\Delta t)}$ .

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Cette condition est en fait trop restrictive; il suffit en principe que la corrélation entre  $X_i$  et  $X_j$  décroisse suffisamment rapidement quand  $|i - j| \rightarrow \infty$ .

Autrement dit, la partie aléatoire du mouvement doit se faire sur une distance de  $\sqrt{2\kappa\Delta t} r$  si le nombre aléatoire r possède une distribution d'écart-type unitaire et de moyenne nulle.

Si le pas de temps devient plus grand, il faut que  $\Delta W$  corresponde à une distribution gaussienne et il faudrait bouger les points de  $\sqrt{2\kappa\Delta t}r$ , où le nombre aléatoire r est distribué selon une gaussienne de moyenne nulle et d'écart type unitaire.

En pratique, le pas de temps est également limité par le fait qu'il faut aussi calculer le déplacement par le courant déterministe. Si celui-ci est variable et donné sur une grille discrète d'espacement  $\Delta x$ , l'approximation numérique de l'intégrale

$$\int_{t}^{t+\Delta t} u[x(t'), t'] \mathrm{d}t' \tag{8.58}$$

demande généralement que le pas de temps satisfasse  $\Delta x > U\Delta t$ , sinon il faut utiliser des méthodes d'intégration plus évoluées<sup>6</sup> que les intégrations du type Euler.

La simulation de rejets variables pourrait donc se faire en injectant un nombre de particules par unité de temps  $\Delta t$  proportionnel à la concentration. Ceci peut, en pratique, donner lieu à un grand nombre de particules à traiter et rendre difficile la prise en compte de termes de mortalité/radioactivité. En effet, en principe, il faudrait faire disparaître des particules aléatoirement, avec une fonction aléatoire qui reflète bien sûr leur temps de décroissance. Une façon plus directe consiste à assigner une masse à chaque particule et à diminuer la masse du traceur en fonction de la loi du terme source. En même temps, on peut rendre compte d'un rejet variable en modifiant la masse des particules injectées.

Au cas où l'on souhaite analyser les champs de concentrations sur une grille Eulérienne, on peut toujours calculer la concentration comme étant le nombre de particules comprises dans un intervalle spatial donné. Si des masses ont été associées aux particules, on fera, bien entendu, une somme pondérée par ces masses.

Les différentes techniques peuvent être combinées (masses variables, nombre de particules injectées, type de fonctions aléatoires) selon les nécessités de l'étude.

Pour des besoins pratiques, nous citons quelques formules utiles pour l'utilisation dans des programmes informatiques de calcul de dispersion :

#### Quelques densités de probabilité

Les distributions sont d'écart type  $\sigma$  et de moyenne  $\mu$  :

#### **Distribution gaussienne**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
(8.59)

**Distribution uniforme pour**  $a \le x \le b$ 

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \mu = (a+b)/2, \quad \sigma = \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}$$
 (8.60)

si la moyenne  $\mu$  et l'écart type sont fixés, alors on détermine a et b par  $a = \mu - \sigma\sqrt{3}$ ,  $b = \mu + \sigma\sqrt{3}$ .

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>A ce moment, il faut être conscient du coût de cette approche eu égard au grand nombre de particules généralement transportées.

#### 8.5. DISPERSION LAGRANGIENNE

Si l'on dispose d'un générateur de nombres aléatoires uniformément distribués sur [0, 1], on peut générer une série de nombres aléatoires distribués selon les lois précédentes par les opérations suivantes.

Pour obtenir une distribution uniforme par la variable aléatoire R sur [a, b] à partir de la variable aléatoire r distribuée uniformément sur [0, 1], on définit R = a + (b - a)r.

Pour obtenir une distribution gaussienne à partir de la variable aléatoire r, il suffit en principe de trouver la fonction inverse de la courbe cumulative. En pratique, pour la gaussienne, cette fonction ne possède pas d'expression simple et au lieu de recourir à des fonctions numériques approximatives, on peut générer des nombres aléatoires ayant une distribution gaussienne en exploitant le fait que certaines combinaisons non-linéaires de variables aléatoires de distribution uniformes donnent lieu à de nouvelles variables aléatoires de distribution gaussienne [?]. Ainsi, si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux variables aléatoires distribuées uniformément sur [0, 1], alors les deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  définies par

$$X_1 = \sqrt{-2\ln u_1} \cos 2\pi u_2, \quad X_2 = \sqrt{-2\ln u_1} \sin 2\pi u_2, \tag{8.61}$$

ont une distribution gaussienne de moyenne nulle et d'écart type unitaire.

# **Exercices**

#### Traceurs définis positifs

Démontrer que, pour un traceur dont l'évolution est régie par (??) sans source, dans un domaine fermé, la concentration du traceur ne dépasse, en aucun point, la valeur maximale initiale trouvée dans tout le domaine, si le tenseur de diffusion est défini positif.

CHAPTER 8. MÉTHODES LAGRANGIENNES

# Chapter 9

# **Calibrations, Validations, Vérifications**



Figure 9.1 : Procédure classique de calibration-validation. Une première série de données permet d'ajuster les paraètres afin de représenter au mieux ces données. Ensuite, le modèle obtenu est utilisé dans une autre configuration avec un deuxième jeu de données. Si le modèle reproduit aussi bien cette autre série de données, indépdentante de la première, on considère que le modèle est calibré

Quand les premiers modèles ont été utilisés et de nouveaux développement incorporés, il est apparu très rapidement la nécessité de pouvoir appréhender l'effet des changements introduits. Il fallut en effet pouvoir vérifier si un changement de paramétrisation par exemple affecte (et améliore) de façon significative les prévisions. Au début de la modélisation, cette estimation était subjective (on donnait au météorlogistes des cartes de prévision établis par plusieurs méthodes et leur demandait laquelle cadrait le mieux).

# 9.1 Calibration

[?]

# 9.2 Validation

Vérification: éthimologiquement,

souvent:

déterminer si le code produit des résultats en accord avec les spécifications du modèle [?]

"test du code de calcul ("bug free") [?]". Sens très restrictif, car il ne teste que si le code de calul est comforme à l'algorithme choisi pour résoudre le problème mathématique. Mais même GESAMP devient plus flou ensuite, en parlant de la vérification du fait que la méthode numérique donne une suffisemment bonne représentation de la solution analytique. Evidemment, les deux aspects de cette vérification sont indépendants (on peut avoir un code de calcul correct d'un mauvais

#### 9.3. ETUDES DE SENSITIVITÉ

schéma numŕique, tout comme un code "buggé" d'un excellent schéma numérique). Comparer les résultats du modèle à une solution analytique est bien un test utile, mais il est difficile de distinguer des erreurs de codage des effets d'un mauvais schéma numérique.

Test de symmétrie et de cas dégénérés (où n'importe quel schéma numérique devrait fournir une solution exacte) permettent de détecter certaines erreurs de programmation

Il conviendrait donc de spécifier quand on parle de vérification s'il s'agit d'un test du code ou de l'algorithme.

Dans le sens de vérification de la conformité du modèle numérique au modèle mathématique, rien ne permet de dire que la modèle représente correctement la réalité.

On pourrait même imaginer des situations où un modèle numérique serait une meilleure représentation de la réalité que le modèle mathématique. Cependant, les spécifications des modèles étant le plus souvent données sous forme d'équations mathématiques, on doit pouvoir attendre du modèle numérique qu'il représent bien la formulation mathématique servant de base de discussion, autrement on devrait donner les spécification des modèles sous la forme de la déscription de leur algorithme numérique.

Force est de constater qu'en pratique, les modèles sont présentés avec la description de leur forme mathématique et numérique, surtout si le modèle mathématique est relativement courant (équations primitives) et que ce sont les aspects numériques qui font la spécificié du modèle.

## 9.3 Etudes de sensitivité

(possibilité de Factor separation)

On modèle pour lequel on n'a pas effectué d'étude de sensitivité ne devrait pas être considéré comme validé.

Il faudrait également utiliser l'étude de sensitivité pour quantifier la calibration. En effet, calibrer un paramètre extrêmement sensible relève plus du "tuning" si la valeur du paramêtre doit être adapté à chaque situation à nouveau. Si tel est le cas, le modèle n'est pas "transportable" car pour une valeur du paramètre choisi, seulement des situations bien spécifiques sont bien modélisés.

# 9.4 Autres concepts liés à la fiabilité d'un modèle

#### 9.4.1 Contrôle de qualité

essentiellement au niveau des bases de données utilisées pour le modèle. Egalement au niveau des vérfication de solutions analytiques [?]

#### 9.4.2 Benchmarking

#### 9.4.3 Transportabilité

On consière un modèle comme transportable, s'il a été validé dans un large spectre de conditions et que l'on peut l'appliquer sans ajustement de paramètres dans un grand éventail de situations.

Ainsi, un modèle 3D d'écoulements turbulents en conduite sera plus transportable qu'un modèle 0D d'un système marin biologique particulier.

## 9.4.4 Robustesse

[?] comportement correct du modèle sous des conditions extrêmes

## 9.4.5 SKILL

SKILL demande une analyse correcte de données et une base de données adéquate pour le SKILL défini demande une mesure quantitative demande la définition d'une borne en deca de laquelle la prediction du modele est considere comme inutile !

#### 9.5. GRAPHIQUES

Avant d'entamer la comparaison des modèles, il est utile de faire le point sur les outils d'analyse des résultats de modèles. En effet, la majorité des modèles produisent une quantité énorme de résultats, qu'il convient de synthétiser afin de pouvoir les comprendre.

Le design d'une séquence est généralement plus facile quand on veut tester une hypothèse...

Lors de l'établissement d'une expérience numérique, il faut déjà anticiper les analyses ultérieures que l'on sera amené à faire. En effet, on ne peut généralement stocker tout l'historique de la simulation, de sorte que certains diagnostiques doivent être prévus et inclues dans la simulation même. Ceci demande également une planification des séquences de simulations et de leur analyse comparative. Il peut aussi être judicieux de prévoir des diagnostiques permanents, permettant de détecter des problèmes lors de la simulation et la cas échéant un arrêt. On peut aussi éviter des simulations inutiles dues à des erreurs d'implmentation incorrectes en simulant un bref laps de temps seulement après un changement. Si l'analyse qui s'en suit est cohérent avec la changement, on peut procéder à la simulation complète, autrement on corrige l'erreur sans avoir perdu trop de temps.

Nous allons à présent mentionner quelques outils permettant ces analyses et diagnostiques. Pour un list plus exhaustive des possibilités d'analyse, il peut être intructif de se reférer aux méthodes utilisées lors de l'analyse de données de terrain EMER97 En effet, les modlèles sont sensés représenter le système réel, quoi donc de plus normal que d'analyser leurs résultats par les mêmes méthodes que les données prises dans un système réel?

# 9.5 Graphiques

Idéalement, afin de faciliter le portage des outils d'analyse, il faudrait choisir des logiciels disponibles à frais réduits sur un maximum de plateformes et systèmes d'exploitation. Même si de nombreux logiciels de représentation de ce typesont disponibles, encore faut il savoir que représenter. 1D 2D 3D, histogrammes

# 9.6 Quantités intégrales

Contenu de chaleur, de sel ou tout autre variable d'état

# 9.7 Paramètres statistiques

Mean, standart deviations, Gaussian distribution fit spectres, regressions

# 9.8 Analyses de séries de données

Correlation, Fourrier, Spectral, Wavelet, Filtres [?] TAMH00 méthodes statistiques classiques prédiction statistiques [?] Test sur des trends: Spearman: Numerical Recipes

# 9.9 Coupes et projections

A coté des coupes classiques dans l'espace, les diagrammes de Hoevmueller sont particulièrement utiles pour détecter une propagation d'un signal dans une direction donnée. En effet, en traçant des courbes de niveau d'une variable dans un espace (x, t), on identifie immédiatement les signaux qui se propagent, et par la pente des isolignes, leur vitesse de propagation dans la direction x. Dans un espace à plusieurs dimensions spatiales, il faut bien entendu choisir la direction x astucieusement.

COPIER le diagramme du travail upwelling et Mer Noire.

, vorticité potentielle sur isopycnes etc

# 9.10 Overturning streamfunction

## 9.11 Echanges d'énergie

## 9.12 Analyses TS

plus général: cluster analysis HAIR98

# 9.13 EOF

#### 9.13.1 SVD

Supposons que l'on souhaite résoudre le système linéaire suivant

$$Ax = b \tag{9.1}$$

mais contrairement au problème linéaire classique, A est de dimension  $m \times n$  (on dira que la matrice appartient à l'enssemble des matrices de  $\mathbb{C}_n^m$ ). Le vecteur inconnu x est de dimension  $n \times 1$  mais nous avons m équations. Le système est donc sousdéterminé si m < n. Pour m = n le problème admet la solution  $x = A^{-1}b$  si le déterminant de A n'est pas nul. Si m > n le problème est surdéterminé et n'admet pas de solution exacte, sauf si les m - n équations supplémentaires sont des combinaisons linéaires des n autres (système compatible). Nous constatons, que selon la taille de la matrice A et sa structure, la solution formelle change, ce qui demandera une discussion détaillée à chaque nouveau problème. Ceci posera d'autant plus de problèmes qu'en réalité, la matrice A n'est pas connue parfaitement. Ainsi, par exemple, des erreurs sur les données pourraient faire passer un problème mathétamatiquement singulier à un problème à solution unique.

Pour cette raison, nous introduisons la notion de décomposition en valeurs singulières, car comme nous allons le voir, cela permet de résoudre un système sous- ou surdéterminé par un même processus. A cette fin, nous commencons par une formulation d'un problème aux valeurs propres. Le problème  $Ax = \rho x$  n'est bien entendu pas bien posé si  $m \neq n$ . Par contre le problème aux valeurs propres suivant est tout à fait licite :

où nous avons construit <sup>1</sup> la matrice carrée B de dimension m + n:

$$\mathsf{B} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{A} \\ \mathsf{A}^{\star} & 0 \end{pmatrix} \tag{9.4}$$

On constate que la matrice B est hermitienne  $B^* = B$ , de sorte que les n + m valeurs propres  $\rho_i$  sont toutes réelles et que les vecteurs propres sont orthogonaux. Etant donné la structure particulière de B, nous pouvons expliciter la structure des valeurs et vecteurs propres. En effet, nous pouvons écrire le problème aux valeurs propres comme suit :

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathsf{A} \\ \mathsf{A}^{\star} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{u} \\ \mathsf{v} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \mathsf{u} \\ \mathsf{v} \end{pmatrix}$$
(9.5)

de sorte nous obtenons le système suivant :

$$\mathsf{Av} = \rho \mathsf{u} \tag{9.6}$$

$$\mathsf{A}^{\star}\mathsf{u} = \rho\mathsf{v} \tag{9.7}$$

le premier système étant de dimension m (comme u) et le second de dimension n (comme v). Nous pouvons en tirer facilement

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^*\mathsf{u} = \rho^2\mathsf{u},\tag{9.8}$$

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A}\mathsf{v} = \rho^2\mathsf{v}.\tag{9.9}$$

applinApplication linéaire, noyau (kernel), et image

Chacun des ces deux systèmes constitue un problème aux valeurs propres classiques pour une matrice hermitienne semi-définie positive<sup>2</sup> de sorte que nous obtenons bien des valeurs propres  $\rho^2$  non-négatives et des valeurs  $\rho$  réelles.

Nous pouvons donc calculer une série de valeurs propros  $\rho_i$  que nous pouvons choisir comme les racines non-négatives de  $\rho_i^2$ . En effet, le choix du signe opposé, en vue des relations (9.7) et (9.6) ne fournirait pas de vecteurs propres indépendants, mais seulement changés de signe. Nous pouvons donc choisir les  $\rho_i$  non-négatifs et les classer dans l'ordre décroissant. Ces valeurs sont alors appelées valeur singulières de la matrice A.

Or, puisque les deux équations (9.9) et (9.8) sont simultanément satisfaites pour une valeur propre  $\rho$  donnée, la solution de n'importe lequel des deux sera suffisante; si nous calculons les m vecteurs propres et valeurs propres u et  $\rho^2$  en résolvant (9.8), on pourra calculer v en utilisant (9.7). Si au contraire, on calcule les n vecteurs propres et valeurs propres v et  $\rho^2$  en résolvant (9.9), nous pourrons déduire u de (9.6). Cependant, étant donné la dimension différente des deux problèmes (9.9) et (9.8), la seule façon de concilier cela avec le fait que les  $\rho$  doivent satisfaire les deux systèmes est d'avoir  $\rho_i = 0$ ,  $i > r = \min(m, n)$ .

$$\mathsf{B} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{A}^* \\ \mathsf{A} & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.3}$$

<sup>2</sup> On vérifie sans peine que les matrice AA<sup>\*</sup> et A<sup>\*</sup>A sont semi-définies positives en calculant par exemple la forme quadratique classique u<sup>\*</sup>AA<sup>\*</sup>u = z<sup>\*</sup>z =  $||z||^2 \ge 0$  avec  $z \equiv A^*u$ .

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> On peut également faire le développement avec la définition suivante :

Cela montre donc qu'il suffit de résoudre le système d'équations dont la taille est la plus faible. Si  $m \le n$ , on calcule donc les m valeurs propres et vecteurs propres par (9.6). Si nous avons obtenus k valeurs propres non-nulles ( $k \le m$ ), on obtiendra k vecteurs propres v par (9.7). Les autres n - k vecteurs propres v<sub>i</sub> ne peuvent plus être obtenus de cette façon puisque les valeurs propres correspondantes sont nulles. On peut les obtenir par la méthode de Gram-Schmidt. En vue de (9.6) nous constatons qu'ils font partie du noyau de A.

$$Av_i = 0, \quad i = k+1, ..., n \tag{9.10}$$

alors que pour les k valeurs propres non nulles nous avons

$$Av_i \neq 0, \quad i = 1, ..., k$$
 (9.11)

Par (9.7), nous constatons également que si k < m, les m - k vecteurs propres u<sub>i</sub> correspondants aux valeurs propres nulles i = k + 1, ..., m font partie du noyau de l'application linéaire adjointe et satisfont

$$A^* u_i = 0, \quad i = k+1, ..., m, \tag{9.12}$$

alors que les k vecteurs propres correspondants aux k valeurs propres non-nuls, i = 1, ..., k sont tels que

$$A^* u_i \neq 0, \quad i = 1, ..., k$$
 (9.13)

Pour m > n, on inverse simplement le rôle de u et v.

Comme les problèmes aux valeurs propres (9.8) et (9.9) sont des problèmes aux valeurs propres de matrices hermitiennes, nous savons que nous avons une base orthonormée de vecteurs propres qui ont ici la particularité de contenir un ensemble de vecteurs propres pouvant servir de base pour le balayage du noyau de A et A<sup>\*</sup>.

A présent, nous pouvons reprende le problème initial, à savoir la résolution du système:

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}.\tag{9.14}$$

Si m > n nous pourrions avoir un système incompatible. Nous étudierons donc la résolution de

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b} + \mathsf{r},\tag{9.15}$$

où nous permettons un résidu r. Nous pouvons alors développer les vecteurs qui interviennent comme suit:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{r} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \mathbf{u}_i, \tag{9.16}$$

où nous connaissons b et par conséquent  $\beta_i = u_i^* b$ . En utilisant (9.6) on obtient

$$A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \rho_i \mathbf{u}_i = \mathbf{b} + \mathbf{r} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \mathbf{u}_i,$$
(9.17)

ce qui par projection se réduit à

$$\alpha_i \rho_i = \mathbf{u}_i^* \mathbf{b} + \gamma_i, \quad i = 1, ..., m \tag{9.18}$$

avec bien entendu  $\rho_i = 0$ , i = k + 1, ...m. Rien ne nous empêche de minimiser le résidu en choisissant  $\gamma_i = 0$ , i = 1, ..., k, car dans ce cas on détermine  $\alpha_i = u_i^* b \rho_i^{-1}$  sans problème<sup>3</sup>. Par contre, pour i = k + 1, ..., m, nous ne pouvons plus déterminer  $\alpha_i$  et avons un résidu donné par  $\gamma_i = -u_i^* b$ , i = k + 1, ..., m. Nous avons donc une solution partiellement indéterminée

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{u}_i^{\star} \mathbf{b}}{\rho_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$$
(9.19)

avec un résidu r que l'on a minimisé :

$$\mathbf{r} = -\sum_{i=k+1}^{m} \mathbf{u}_{i}^{\star} \mathbf{b} \mathbf{u}_{i}$$
(9.20)

Nous constatons que le résidu peut-être nul si la condition de compatibilité  $\gamma_i = 0$ , i = k + 1, ..., m est satisfaite. D'autre part, la solution x contient une composante lié au noyau de A. Aucune information n'est accessible par les équations sur cette partie. Le choix  $\alpha_i = 0$ , i = k + 1, ..., n constitue le choix d'une solution de norme minimale pour un résidu minimal et nous obtenons la solution appellée SVD (Singular Value Decomposition).

Nous pouvons réecrire la solution sous forme matricielle en construisant deux matrices carrées: U de dimension  $m \times m$  est donné par  $U = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_m)$  et V de dimension  $n \times n$  par  $V = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_n)$ . De même, nous construisons une matrice rectangulaire D de dimension  $m \times n$  de sorte que  $(D)_{ii} = \rho_i, \quad i = 1, \dots k$ , les autres éléments étants nuls. Il s'agit d'une simple généralisation de matrices diagonales.

Dans ce cas, il est aisé d'écrire les relations d'orthonormalité  $U^*U = UU^* = \mathbb{1}_m$  et  $V^*V = VV^* = \mathbb{1}_n$  rappellant que les inverse de matrices unitaires sont leurs adjointes. Mais nous avons (9.6), (9.7),(9.8), (9.9) qui peuvent se réécrire en

$$\mathsf{A}^*\mathsf{U} = \mathsf{V}\mathsf{D}^\mathrm{T} \tag{9.21}$$

$$AV = UD \tag{9.22}$$

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^*\mathsf{U} = \mathsf{U}\mathsf{D}\mathsf{D}^\mathrm{T} \tag{9.23}$$

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A}\mathsf{V} = \mathsf{V}\mathsf{D}^{\mathrm{T}}\mathsf{D} \tag{9.24}$$

D'où nous tirons la diagonalisation suivante

$$\mathsf{U}^*\mathsf{A}\mathsf{V}=\mathsf{D},\tag{9.25}$$

ou la décomposition en valeurs singulières

$$A = UDV^{\star}.$$
 (9.26)

Notons que les valeurs singulières sont les  $\rho_i$  et donc les racines carrées des valeurs propres des matrices AA<sup>\*</sup> et A<sup>\*</sup>A par (9.8) et

Nous pouvons aussi calculer la pseudo-inverse  $A^4$  de A. La pseudo-inverse est de dimension  $n \times m$  et satisfait

$$AA^{+}A = A, A^{+}AA^{+} = A^{+}, (AA^{+})^{*} = AA^{+}, (A^{+}A)^{*} = A^{+}A$$
 (9.27)

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>En pratique, si les valeurs propres deviennent très faibles, cela veut dire que les équations ne sont pas suffisamment riches pour déterminer les vecteurs propres correspondants de façon suffisamment précise. Dans ce cas, on peut considérer qu'ils font partie du noyau et ainsi oublier l'information contenue dans les équations.

Pour une matrice diagonale généralisée D, la matrice pseudo-inverse s'obtient aisément

$$\left(\mathsf{D}^{+}\right)_{ii} = \frac{1}{\left(\mathsf{D}\right)_{ii}}, \quad , i = 1, ..., k$$
 (9.28)

les autres éléments étants nuls. De la on verifie que

$$A^{+} = VD^{+}U^{*}. (9.29)$$

Ainsi, la solution du système linéaire

$$Ax = b \tag{9.30}$$

par  $A^+b$  ne fournit rien d'autre que la solution de norme minimale et de résidu minimal que nous avons déjà analysée.

La résolution d'un sysème par la pseudo-inverse donnera donc lieu à une solution dans le sens des moindres carrés pour un système surdéterminé non compatible, à la solution classique pour une système linéaire classique non singulier, et à une solution de norme euclidienne minimale pour le cas d'un système sousdéterminé ou singulier. L'analyse des valeurs singulières indique également dans quel cas l'on se trouve.

#### 9.13.2 Analyse de signaux

#### LA REFERENCE??[?]

Nous pouvons considérer que tout modèle nous fournit une série de nombres (m) à chaque instant, cette série de nombres pouvant être le vecteur d'état proprement dit du système, un sousensemble ou une grandeur utile pour les diagnostiques: x(t). De par sa nature discrète, nous aurons plutôt une serie de vecteurs  $x_i$  à des moment équidistants  $t_i = t_0 + i\Delta T$ ,  $\Delta T^{-1}$  étant donc la fréquence d'échantillonage du modèle. On effectuera n échantillonages sur la durée  $n\Delta T$  de la simulation. Pour un modèle 3D de haute résolution, n est généralement beaucoup plus petit que m.

On peut se demander si l'on peut décomposer le signal dans une base orthonormée  $u_i$  particulière afin de représenter la variabilité de façon efficace (en alignant les vecteurs de la base dans les directions privilégiés de la variabilité):

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{m} \gamma^{(j)}(t) \mathbf{u}_j$$
(9.31)

soit en variables discrètes

$$\mathbf{x}_i \equiv \mathbf{x}(t_i) = \sum_{j=1}^m \gamma^{(j)}(t_i) \mathbf{u}_j.$$
(9.32)

Bien entendu, si l'on connait la base orthornormée, le calcul de  $\gamma^{(j)}(t_i)$  est immédiat par les relations d'orthonormalité :

$$\gamma^{(j)}(t_i) = \mathbf{u}_j^* \mathbf{x}_i. \tag{9.33}$$

Notre objectif étant d'analyser la variabilité, nous pouvons supposer que le vecteur d'état x est une déviation par rapport à une moyenne. Ici cela signifie que  $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ .

Nous aurions un vecteur de base u bien choisi, si en moyenne sur le temps considéré, il s'aligne bien selon un axe de variations temporelles cohérentes dans l'espace. Nous cherchons donc des vecteurs de base qui maximisent<sup>4</sup>

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{u}^* \mathbf{x}_i\|^2 \tag{9.36}$$

sous la contrainte  $u^*u = 1$ . En définissant une matrice  $X \in \mathbb{C}_n^m$ :

$$\mathsf{X} = \left(\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \dots, \mathsf{x}_n\right),\tag{9.37}$$

la recherche de ce maximum peut se faire sous forme variationelle avec un multiplicateur de Lagrange  $n\lambda$  pour la contrainte de normalisation :

$$\delta_{\mathsf{u}}\left[\|\mathsf{u}^{\star}\mathsf{X}\|^{2} - n\lambda\left(\mathsf{u}^{\star}\mathsf{u} - 1\right)\right] = 0.$$
(9.38)

On définit alors une matrice carrée C hermitienne de dimension  $m \times m$  :

$$\mathsf{C} \equiv \frac{1}{n} \mathsf{X} \mathsf{X}^{\star} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{x}_{i} \mathsf{x}_{i}^{\star}, \tag{9.39}$$

que l'on interprète comme une matrice de covariance spatiale que l'on a obtenue en remplaçant la moyenne statistique par une moyenne temporelle sur la série de données disponibles<sup>5</sup>. Dans ce cas les équations d'Euler Lagrange du principe variationnel sont

$$\mathsf{Cu} = \lambda \mathsf{u},\tag{9.42}$$

<sup>4</sup> Une géneralisation avec des poids différents sur les points en fonction de la précision est envisageable:

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{u}^{\star} \mathbf{W}_{i} \mathbf{x}_{i}^{2}$$
(9.34)

où W est une matrice de poids  $m \times m$ . En définissant une nouvelle série

$$\mathsf{z}_i = \mathsf{W}_i \mathsf{x}_i \tag{9.35}$$

on retombe sur le développement classique. Le poids peut être fonction de la surface représentative par la donnée (si  $(W_i)_{kl} = \delta_{kl}\sqrt{A_k\bar{A}^{-1}}$ , avec  $A_k$  la surface associé au point de données k et  $\bar{A}$  leur moyenne sur toute le domaine, on calcule la moyenne par une intégrale plutôt qu'une somme) ou fonction de la précision associée. Ici il est utile de rapeller que nous travaillons avec des anomalies, que l'on peut donc pondérer. DAVI76 montre comment on peut optimiser les poids dans le cas de données manquantes afin de reduire l'estimation de l'erreur sur les amplitudes des modes. KAPL97, quant à eux montrent comment tenir compte de données manquantes lors d'un filtrage de la matrice de covariance. VERIFIER que mon poids correspond a cela???

<sup>5</sup>Dans ce cas, on introduit une erreur par rapport à la vraie matrice de covariance. Pour une distribution normale, l'erreur standart  $\epsilon$  sur l'estimation de l'ecart type  $\sigma$  est

$$a = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}.$$
(9.40)

De même, l'erreur standard  $\delta C$  sur l'estimation de matrice de covariance C par un nombre fini n de réalisations est NORT82

$$\delta \mathsf{C} = \frac{1}{2n} \mathsf{E}, \quad (\mathsf{E})_{ij} = \sqrt{\frac{\left( (\mathsf{C})_{ii} \, (\mathsf{C})_{jj} + (\mathsf{C})_{ij}^2 \right)}{2}}.$$
(9.41)

On vérifie sans peine que trace(E) = trace(C) de sorte que la variance de l'erreur  $\epsilon^2$  est bien donnée par  $\sigma^2/(2n)$  où  $\sigma^2 = \text{trace}(C)$  est la variance totale du signal

66

$$\mathsf{u}\mathsf{u}^{\star} = 1, \tag{9.43}$$

et nous constatons que nous retombons sur l'analyse SVD. En particulier, nous pouvons calculer les valeurs propres aussi par une matrice de covariance temporelle S de dimension  $n \times n$ 

$$\mathsf{Sv} = \lambda \mathsf{v} \tag{9.44}$$

$$S \equiv \frac{1}{n} X^* X, \quad u = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X v$$
 (9.45)

La d'écomposition SVD de la matrice X nous fournit les vecteurs de base u (que nous utilisons pour former donc une matrice de vecteurs de base  $U \in \mathbb{C}_m^m$ 

$$U = (u_1, u_2, ..., u_m)$$
(9.46)

dans l'ordre des valeurs singulières décroissantes) sur lesquels nous avons une variabilité la plus cohérente dans le temps. Ensuite, nous pouvons projetter l'évolution du vecteur x(t) sur chacun des ces axes, pour étudier comment le mode en question évolue. Ceci peut se faire par les outils classiques d'analyse de fréquence etc, si l'on calcule

$$\gamma^{(j)}(t_i) = \mathsf{u}_j^* \mathsf{x}_i \tag{9.47}$$

ou sous forme matricielle

$$\mathsf{G} = \mathsf{U}^*\mathsf{X} \tag{9.48}$$

avec le développement de départ:

$$X = UG. \tag{9.49}$$

L'on identifie G via la décomposition SVD

$$\mathsf{G} = \mathsf{D}\mathsf{V}^{\star} \tag{9.50}$$

puisque

$$X = UDV^*. \tag{9.51}$$

On trouve bien entendu que la matrice U est constituée des vecteurs propres du problème et que les valeurs propres de notre problème sont obtenues à partir des carrés des valeurs singulières constituant la matrice D:

$$\lambda_i = \frac{(\mathsf{D})_{ii}^2}{n} \tag{9.52}$$

Nous constatons<sup>6</sup> que sur la durée  $n\Delta t$ , les évolutions des modes sont statistiquement décorellés car  $G^*G = \mathbb{1}_n$ .

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma^{l}(t_{i})^{\star} \gamma^{m}(t_{i}) = n\lambda_{l}\delta_{lm}$$
(9.53)

On retrouve alors le même problème aux valeurs propres que celui obtenu en cherchant des modes qui ressemblent au mieux en moyenne au signal.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Une construction alternative de la théorie des EOF part de l'idée de trouver des modes spatialement orthogonaux qui sont temporellement décorellés sur l'intervalle de temps des données. Autrement dit, on cherche des modes pour lequels

L'évolution temporelle de l'amplitude d'un mode I est alors simplement donnée par

$$\gamma^{I}(t_{i}) = \mathbf{u}_{I}^{*} \mathbf{x}(t_{i}) = (\mathsf{D})_{II} (\mathbf{v}_{I}^{*})_{i}$$
(9.54)

autrement dit, la séquence temporelle du mode *I* se retrouve comme les composantes du vecteur  $(D)_{II} v_I^*$ .

La variabilité totale du signal est donnée par

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_{i}^{\star} \mathbf{x}_{i} = \operatorname{trace}\left(\mathbf{X}^{\star} \mathbf{X}\right) = n \sum_{i=1}^{m} \lambda_{i}$$
(9.55)

de sorte que la variance totale du signal  $\sigma^2$  est donné simplement par la somme  $\sigma^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i$ . Si nous considérons à présent la contribution d'un mode *I* donné à la variabilité, nous avons sa variance

$$\sigma_I^2 \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \gamma^I(t_i) \mathbf{u}_I \right)^* \gamma^I(t_i) \mathbf{u}_I = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma^I(t_i)^* \gamma^I(t_i) = \lambda_I \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{v}_I \right)_i \left( \mathbf{v}_I^* \right)_i = \lambda_I$$
(9.56)

Si l'on retient les I premiers modes (dans l'ordre décroissant des valeurs propres) on dit que la série tronquée au I ième membre explique une fraction  $p_I$  de la variance du signal, et l'on calcule cette fraction par

$$p_I = \frac{\sum_{i=1}^{I} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i} \tag{9.57}$$

Le Ième mode explique à lui seul la fraction

$$f_I = \frac{\lambda_I}{\sum_{i=1}^m \lambda_i}.$$
(9.58)

Puisque ce sont les valeurs propres les plus grandes qui nous intéressent en priorité, on peut optimiser leur calcul en utilisant un algorithme de calcul de valeurs propres exploitant le fait que la matrice est hermitienne semi-définie positive et que l'on ne s'intéresse qu'aux valeurs propres les plus importantes. S'il faut ensuite calculer le rapport  $\lambda_i / \sum_i \lambda_i$ , on peut exploiter le fait que  $\sum_i \lambda_i = \text{trace}(C)$ . Autrement si la taille des matrices impliquées n'est pas trop grande, on peut faire appel aux routines SVD des logiciels tels que MATLAB ou MATHEMATICA<sup>7</sup>.

Rappelons encore une fois que les  $\lambda_i$  sont les carrés des valeurs singulières de la matrice obtenues par une décomposition SVD divisés par n (à cause de la définition des vecteurs propres et valeurs propres à partir de la matrice de covariance au lieu de XX<sup>\*</sup>).

Nous avons donc une méthode efficace de représentation de la série de données si quelques modes propres sont suffisants pour arriver à représenter un pourcentage suffisemment élevé de la variabilité. Le choix du nombre de modes nécessaires peut être subjectif (on tronque la série quand on a expliqué 95 ou 99 % de la variabilité) ou objectif (on arrète quand on sait que le niveau de l'erreur de troncature de la série est proche du niveau de bruit sur les données ou sur l'analyse EOF elle-même).

PREI77 présentent une méthode pour détecter le niveau à partir duquel il devient impossible de distinguer un signal d'un mode EOF d'un signal généré par un bruit blanc. Leur procédure est la suivante: On génère une matrice X de même dimension que celle que l'on étudie par une méthode

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Le logiciel MATLAB se conforme à la présente formulation mais le logiciel MATHEMATICA fournit une vraie matrice diagonale et une des matrices V ou U rectangulaire avec des éléments nuls.

de Monte-Carlo (variables gaussiennes non correlées). Ensuite on calcule les pourcentages  $f_I$  des cette réalisation r que nous notons  $f_I^r$ . On répète cette procédure 100 fois et on classe les  $f_I^r$  pour chaque mode dans l'ordre croissant. Ainsi  $f_I^{95}$  est un seuil qui indique que dans 95 pourcents des cas, une variable aléatoire produit une fraction expliquée  $f_I$  plus faible que  $f_I^{95}$ . D'où l'on tire un critère d'arrêt: on arrête la série dès que avant le moment où la variance expliquée du mode va être plus petite que  $f_I^{95}$ , puisqu'il y a peu de chances (5 %) que la fraction ainsi encore retenue soit le fruit d'un pur hasard.

Une autre approche pour un critère d'arret peut être basé sur une connaissance a priori du bruit sur le vecteur x. En effet, si nous supposons que le vecteur est composé du vrai signal auquel se superpose un bruit non-correllé au signal, la matrice de covariance que l'on forme sera la vraie matrice de covariance  $C_t$  à laquelle s'ajoute la matrice de covariance du bruit  $C_n$ . Par rapport aux "vraies" valeurs propres  $\lambda_i$  et vecteurs propres  $u_i$ , nous obtenons donc des valeurs modifiés satisfaisant

$$\left(\mathsf{C}_{t} + \mathsf{C}_{n}\right)\left(\mathsf{u}_{i} + \mathsf{n}_{i}\right) = \left(\lambda_{i} + \mu_{i}\right)\left(\mathsf{u}_{i} + \mathsf{n}_{i}\right) \tag{9.59}$$

Si nous supposons que le bruit est faible par rapport au signal, nous pouvons développer le calcul des valeurs et vecteurs propres par perturbations et nous devons avoir

$$\mathsf{C}_{n}\mathsf{u}_{i} + \mathsf{C}\mathsf{n}_{i} = \lambda_{i}\mathsf{n}_{i} + \mu_{i}\mathsf{u}_{i} \tag{9.60}$$

La relation d'orthonormalité devient au premier ordre dans la perturbation n<sub>i</sub>:

$$\mathsf{u}_i^*\mathsf{n}_i = 0 \tag{9.61}$$

En multipliant (9.60) par  $u_i^*$  et en utilisant  $u_i^*C = \lambda_i u_i^*$ , on obtient immédiatement la modification des valeurs propres:

$$\mu_i = \mathsf{u}_i^* \mathsf{C}_n \mathsf{u}_i. \tag{9.62}$$

Pour calculer les variations sur les vecteurs propres, il suffit de projeter le vecteur dans la base des  $u_j$ 

$$\mathsf{n}_i = \sum_{l=1}^m a_l^{(i)} \mathsf{u}_l \tag{9.63}$$

et de multiplier (9.60) par  $u_j$ ,  $j \neq i$ . On obtient alors

$$\mathsf{u}_j^*\mathsf{C}_n\mathsf{u}_i + a_j^{(i)}\lambda_j = \lambda_i a_j^{(i)} \tag{9.64}$$

D'ou nous tirons

$$\mathbf{n}_i = \sum_{j \neq i} \frac{\mathbf{u}_j^* \mathbf{C}_n \mathbf{u}_i}{\lambda_i - \lambda_j} \mathbf{u}_j \tag{9.65}$$

et (9.61) est satisfait.

Ici, nous avons dû faire l'hypothèse que nous n'avons jamais deux valeurs propres identiques  $\lambda_i = \lambda_j$ . Ce cas est en fait une dégénerescence et les deux vecteurs propres associés ne sont pas définis de façon univoque, puisque toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs propres sera un vecteur propre. Dans ce sens, il est normal de trouver une sensibilité "infinie" de ces vecteurs propres. En pratique, ce cas est plutôt rare. Par contre, nous constatons que s'il y deux valeurs propres qui sont proches, il y a un phnomène d'amplification de l'erreur.

Il faudrait assurer que  $|\mu_i| \ll |\lambda_i - \lambda_k|$ , autrement, on risque de modifier les modes propres de sorte qu'on se trouve dans un cas de dégénerescence "de fait".

L'erreur sur l'évolution temporelle de l'EOF peut s'obtenir à partir de l'information de la matrice de covariance temporelle de l'erreur  $S_n$ : l'évolution temporelle du mode *i* perturbé est représentée par les composantes du vecteur

$$\mathsf{e}_i + \mathsf{o}_i = \sqrt{n \left(\lambda_i + \mu_i\right)} \left(\mathsf{v}_i + \mathsf{m}_i\right) \tag{9.66}$$

alors que le mode non perturbé est donné par

$$\mathbf{e}_i = \sqrt{n\lambda_i} \,\mathbf{v}_i \tag{9.67}$$

et nous pouvons calculer

$$\mathsf{m}_{i} = \sum_{j \neq i} \frac{\mathsf{v}_{j}^{\star} \mathsf{S}_{n} \mathsf{v}_{i}}{\lambda_{i} - \lambda_{j}} \mathsf{v}_{j}$$
(9.68)

Au premier ordre, nous avons donc une amplitude entachée d'une erreur de

$$\mathbf{o}_{i} = \frac{\mu_{i}}{2\lambda_{i}}\mathbf{e}_{i} + \sum_{j \neq i} \sqrt{\frac{\lambda_{i}}{\lambda_{j}}} \frac{\mathbf{v}_{j}^{\star} \mathbf{S}_{n} \mathbf{v}_{i}}{(\lambda_{i} - \lambda_{j})} \mathbf{e}_{j}$$
(9.69)

Ici aussi, il y a amplification d'erreurs si deux valeurs propres sont trop proches. Malheureusement, les formules présentées ne seront pas utiles pour calculer les perturbations dans la pratique. En effet, il faudrait connaître la matrice de covariance du bruit  $C_n$  pour ce faire. Mais dans ce cas, on pourrait immédiatement calculer la "vraie solution" en retirant  $C_n$  de la matrice de covariance calculée à partir des données. Par contre, si nous avons une estimation de la matrice de covariance de façon approximative, nous pouvons alors calculer une estimation de l'erreur sur les valeurs propres et vecteurs propres. En particulier, si nous savons que le seul bruit est un vrai bruit blanc de variance  $\epsilon^2$  (erreurs instrumentales, ...) seul les valeurs propres sont modifiées car  $C_c = \epsilon^2 \mathbb{1}$ . Les vecteurs propres ne sont par contre pas modifiés. On doit alors tronquer la série au terme ou  $\lambda_I \sim \epsilon^2$ . A l'autre extrême, si le "bruit" est lié à un signal marginalement résolu par la série temporelle ou la couverture spatiale, nous pouvons faire appel au problème continu pour evaluer l'erreur due à la discrétisation. En effet, la "vraie" matrice de covariance serait

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^*(t) \mathrm{d}t \tag{9.70}$$

que nous avons en fait calculé par une intégration par la méthode du "rectangle", dont on sait que l'erreur est proportiennel à  $\Delta T^2$ .

Exemple de matrice de covariance ???

Bien entendu, à partir du mode I pour lequel  $\lambda_I \sim \epsilon^2$ , les EOF essayent d'analyser le bruit et nous les écartons donc. Notons que le bruit affecte tous les modes, mais proportionellement moins les modes les plus forts. Si le bruit affectant les données possède une structure spatiale, alors non seulement les valeurs propres sont modifiés mais également les modes EOF aux mêmes. Ceci veut dire que pour un deuxième set de données du même système, nous devons nous attendre à obtenir des EOF différents, surtout ceux pour lequels la norme de la matrice de covariance du bruit devient importante par rapport à ou si le nombre d'échantillons n'est pas suffisemment élevé NORT82.

Notons que le théorème de Eckart-Young-Mirsky montre que le résidu de la série troncquée est minimal pour un I fixé quand les vecteurs u et v sont bien les vecteurs singuliers normalisés associés aux I valeurs singulières  $\sqrt{\lambda_i}$  les plus grands.

Bien entendu, la décomposition dans le temps peut aussi être remplacée par un développement selon une direction spatiale. Pour un cas 1D, cela revient à intervertir la coordonnée spatiale et temporelle, ou en termes de matrice de X d'en prendre sa transposée. Or

$$\mathsf{X}^{\star} = \mathsf{V}\mathsf{D}^{\mathrm{T}}\mathsf{U}^{\star} \tag{9.71}$$

de sorte que l'on peut simplement invertir le rôle de U et V pour passer d'une interprétation espacetemps à une interprétation temps-espace sans devoir recalculer une matrice de covariance temporelle au lieu d'une matrice de covariance spatiale.

Un avantage de la décomposition EOF est son caractère linéaire dans la phase d'analyse alors que le signal peut être complètement non-linéaire. Cependant, comme leur nom l'indique, les modes sont parfaitement empiriques et ne donnent en général pas lieu à une interprétation physique immédiate. Un mode physique peut ainsi être contenu dans plusieurs EOF et inversément, une EOF peut contenir de l'information sur plusieurs modes physiques. Aussi, les modes sont construits à partir d'une série de données sur un système, et si l'on recalcule une série de EOF à partir d'une série de données ultérieures, on obtiendra une autre décomposition. Les EOF particulier d'une réalisation peuvent généralement être assez différents d'une autre réalisation d'une même expérience, mais heureusement, l'espace couvert par les premiers EOF les plus importants est quant à lui robuste.

Ainsi, l'utilisation des EOF comme base de calcul pour une évolution prognostique ou d'assimilation devrait contenir un enssemble de EOF plus riches que le signal de départ ne le suggère. Le problème dans ce cas est que nous n'avons aucune information sur la structure des EOF à retenir en plus, car ils ne sont pas contenus de façon significative dans les données utilisées pour les construire. Ainsi, dans les méthodes d'assimilation basées sur les EOF, on travaille avec un base de EOF que l'on remet à jour régulièrement en y ajouttant des modes au hasard et en retirant les modes les moins énergétiques. BRAS Extented Kalman Filter PHAM98

Le fait que les EOF permettent de réduire les informations de façon spectaculaire peut aussi être mis au profit de recherches de correlations entre deux variables. En comparant l'évolution des EOF des ces variables, on peut détecter plus facilement des correlations qu'avec les champs complets.

L'analyse EOF est la plus naturelle si le vecteur d'état contient une seule variable physique. Dans la cas contraire, on peut normaliser les variables physiques de plusieurs façons, conduisant a d'autant d'analyses EOF différentes. Ainsi s'il y a plusieurs types de variables ou une variable avec une variabilité bien distincte dans deux sous-régions, on peut remplacer les matrices de covariance par une matrice de correlation, ayant ainsi normalisé chacque valeur locale par l'écart-type temporel local. En pratique, on devrait donc étudier l'effet de normalisations (et de classement dans le vecteur x). Un cas simple de généralisation pouvant traîter conjointement les deux composantes du vecteur vitesse horizontal est la COEF (complex EOF). En effet, il suffit de stocker les variables u et v comme les composantes d'un nombre complexe consituant un élément de x. Toute l'analyse EOF reste d'application, puisque nous l'avons présentée sans faire appel à une hypothèse sur le caractère réel de x. On peut donc l'étendre sans problème égalemend au domaine spectral. On peut par example effectuer une transformée de Fourrier rapide sur les séries temporelles et ensuite effectuer une SVD sur le matrice constituée des amplitudes complexes, fonction de la fréquance et de l'espace. Nous aurions alors une représentation "optimale" dans le domaine spectral avec une possibilité de représenter des propagations HOGG77, WANG77 Une autre façon d'analyser les propagations sont des approches basées sur les ... lagged.

On général, on peut appliquer la décomposition SVD à toute série de données distribuées uniformément dans un "espace" 2D. Ici "espace" désigne simplement un classement selon un certain critère, comme la position dans le temps, dans l'espace etc.

MSSA, : EOF en delay data with maximum lag: Pour pouvoir séparer des signaux de valeurs singulières proches.

Si des modes EOF on des variances proches, il y a danger de dégénérences, car les valeurs propres et vecteurs propres sont proches.

Un problème des EOF est qu'ils caractplutôt des variations qui ont un même comportement dans le temps (typiquement une onde stationnaire) mais pas une propagation d'un signal.

Si le domaine d'analyse est trop petit, il se peut que les signaux de part et d'autre du domaine soient correlés et que l'EOF se voit imposer une structure par la taille du domaine. Si au contraire le domaine est trop large, des signaux qui ont une variance similaire dans des endroits éloignés se verront couplés artificiellement par l'analyse EOF.

Notons que le succès des EOF verticaux en ocánographie est notemment dû au fait que la plus grande variabilité est observée à la surface des océans, de sorte que les EOF ont généralement une amplitude rapidement décroissante vers les profondeurs. Ainsi, on utilise naturellement les EOF pour projetter des informations obtenues en surface vers les zones profondes. Typiquement on cherche à exploiter les EOF dans l'utilisation des photos satellitaires dans la détermination des structures 3D de densité. Cette approche est également utile dans une optique d'assimilation.

Notons que la décomposition présenté se recontre dans sa version continue sous le nom de décomposition orthogonale propre (POD) ou décomposition de Karhunen-Loève LUML71,HOLM96. Dans d'autres domaines, la méthode discrète fait aussi référence aux modes propres orthogonaux (POM) ou à l'analyse en composantes principales (PCA), voire la "factor analysis" en sciences sociales HAIR98.

Pour des processus qui se propagent, il est plus utile de faire appel aux CEOF...

IDEE: construire matrices de variations de x d'un pas à l'autre; peut être cela serai mieux pour détecter/prédire des tendances ultérieures en fonction des tendances précédentes; ou bien est-ce equivalent? Bref essayer de construire

$$(x_1 - x_0 \quad x_2 - x_1 \quad \dots \quad x_n - x_{n-1})$$
 (9.72)

Déjà fait???

Algo pour selection rapide des premiers modes: la séquence suivante

$$\mathsf{u} \leftarrow \mathsf{X}\mathsf{v} \tag{9.73}$$

$$\rho \leftarrow \sqrt{\mathsf{u}^*\mathsf{u}} \tag{9.74}$$

$$\mathsf{u} \leftarrow \frac{\mathsf{u}}{\rho} \tag{9.75}$$

$$\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{X}^{\star}\mathbf{u} \tag{9.76}$$

$$\begin{array}{ccc}
\rho \leftarrow \sqrt{\mathbf{v}^* \mathbf{v}} & (9.77) \\
\mathbf{v} & (9.77)
\end{array}$$

$$\mathbf{v} \leftarrow \frac{1}{\rho}$$
 (9.78)

(9.79)

génére une suite de valeurs singulières et de vecteurs propres qui convergent rapidement vers le plus grande valeur singulière et ses vecteurs propres correspondants. En effet, la séquence proposée n'est rien d'autre qu'une adaptation de l'algorithme basé sur le quotient de Raleigh (REF), évitant cependant le calcul explicite d'une des deux matrices de covariance (dont le coût associé serait  $m^2n$  où  $mn^2$ ). Le nombre d'opérations par itération de notre schéma se comporte comme  $2(m + m^2)$ 

2)(n + 2) Quand on connait la valeur singulière  $\rho$  et les vecteurs propres associés u et v, on peut calculer la valeur suivante en exploitant la décomposition  $X = UDV^*$  et redéfinir

$$\mathsf{X} \leftarrow \mathsf{X} - \rho \mathsf{u} \mathsf{v}^{\star} \tag{9.80}$$

sur laquelle on peut appliquer le même algorithme, mais qui convergera vers la seconde valeur propre (attention a la propagation de l'erreur, il faut que la recherche precedente aie bien convergee, sinon va garder une partie de la structure correspondante a la valeur propre non convergee...)

Calcul direct de SVD: le cout se comporte comme  $mn\min(m, n) + \min(m, n)^3$ 

L'approche itérative pourrait donc rester intéressante si  $m \sim n$  et que quelques valeurs propres suffisent pour caractériser la système.

Taux de convergence de l'estimation  $\rho_1^{(k)}$  à l'itération k de la valeur propre la plus grande  $\rho_1$ :

$$\rho_1 = \rho_1^{(k)} + \mathcal{O}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k \tag{9.81}$$

Et la convergence se déteriorise si la deuxileme valeur propre est proche de la premiere. Dans se version récursive de la méthode d'exhaustion, nous constantons donc que l'algorithme ralentit quand on s'approche de la plage des valeurs propres qui sont proches. Mais puisque de toute façon on s'arrête quand les valeurs propres sont trop proches, on s'arrête de fait au moment où l'algorithme converge moins bien !

Extrapolation en  $h^2$ : [?]

$$\sum_{i=1}^{n} m\rho^2 = \text{trace}\left(\mathsf{X}\mathsf{X}^{\star}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |(X)_{ij}|^2$$
(9.82)

(mn opérations)

Autres idees de robustness: changer l'ordre des points (2D spatial est toujour remplace par un vecteur 1D. Changer l'ordre de rangement... Aussi: avoir des zeros au milieu (decoreller ou terre) cela change t'il le resultat?

Une sorte de validation croisée sur le seuil a retenir: Remplacer un set arbitraire de données par des zeros et calculer pour un nombre I de modes retenus, l'ecart en ces points, entre la serie tronquée et les données initiales. Si  $I \ll m, n$  alors l'écart sera grand (pas suffisemment de modes significatifs inclu). De meme si  $I \sim m, n$  l'écart sera grand également, puisque nous aurons restitue la nouvelle série correctement mais qui contient des zéros là où au départ, on en n'avait pas ! D'ou l'idée, trouver  $I^*$  tel que l'écart de prédiction devient minimal en ces points. Validation croisee classique: on écarte un seul point à la fois, et on répète l'expérience suffisemment souvent pour pouvoir faire des statistiques. Validation généralisée: on enleve un set de données suffisemment large pour fare des statistiques sur le set, mais suffisemment petit pour ne pas perturber trop l'analyse EOF. Il faudrait donc verifier la robustesse de cette approche en effectuant la validation croisée avec un set plus ou moins large pour valider la méthode mettre  $\sqrt{mn}$  points pris au hasard à zéro semble marcher assez bien ...

Charactérisation générale de l'erreur sur les valeurs propres d'une matrice hermitienne Aperturbéepourdor  $+ \delta A e.g; [?] |\delta \lambda_k| \le ||\delta A||_2$ où la norme  $||A||_2^2$  est donné par le rayon spectral de A\*A

ici, on peut majorer le rayon spectral par la trace de A\*A, ou, ce qui revient au même, par la norme euclidienne de A

si on connait la variance du bruit on peut donc majorer par l'erreur sur chaque valeur propre par cette variance. Cette borne supérieure est cependant trop pessimiste, car nous savons que la
somme des erreurs doit être égal à la variance du bruit. Majorer l'erreur sur une valeur propre par cette variance revient à supposer que l'erreur a la même structure que l'EOF en question, sinon l'erreur serait distribuée sur plusieurs EOF.

EOF pour prédiction par réseau de neurones [?]

## 9.14 Modes physiques

L'archétype d'une décomposition en modes physiques est la décomposition en modes normaux verticaux [?]. De plus, nous étudierons une onde de faible amplitude qui se propage dans un environnement stratifié au repos. Dans ce cas,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{9.83}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\mathbf{\Omega}\Lambda\mathbf{v} = -\mathbf{\nabla}q + b\mathbf{e}_3,\tag{9.84}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + N^2(z)w = 0, \tag{9.85}$$

où  $N^2(z) = \frac{\partial b_0}{\partial z}$  est la fréquence de Brunt-Väisälä du profil de densité ambiant  $b_0(z)$ .

Nous allons projeter ces équations sur des axes orientés de sorte que x représente la longitude, y la latitude et z la distance par rapport à la surface du globe. Dans ce cas, nous allons nous limiter au voisinage d'un point d'intérêt pour pouvoir écrire les équations dans un système de coordonnées cartésiennes qui tient compte de la variation du paramêtre de Coriolis (plan  $\beta$ ). En toute généralité, nous posons donc  $f = 2\Omega \sin \lambda$ ,  $f^* = 2\Omega \cos \lambda$ ,  $\beta = \frac{df}{dy}$ ,  $\beta^* = \frac{df^*}{dy}$ , ce qui permet d'écrire les équations pour les perturbations liées aux ondes en coordonnées cartésiennes locales comme suit :

L'approximation des ondes longues  $L_h \gg L_v$  nous permet d'utiliser l'équilibre hydrostatique si  $T \gg N^{-1}$ . Dans ce cas, il est aussi habituel de poser  $f^* = 0$ . Nous avons donc le système Boussinesq aussi...

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad (9.86)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - \frac{\partial q}{\partial x},\tag{9.87}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu - \frac{\partial q}{\partial y},\tag{9.88}$$

$$0 = -\frac{\partial q}{\partial z} + b, \tag{9.89}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + N^2(z)w = 0. \tag{9.90}$$

Une équation pour la vorticité s'obtient aisément par dérivation croisée de (9.87) et (9.88) et l'utilisation de (9.86) pour éliminer la divergence horizontale du courant:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - f \frac{\partial w}{\partial z} + \beta v = 0$$
(9.91)

Nous pouvons éliminer u entre (9.92) et (9.86) via dérivations partielles sur x et t:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial y \partial z} - f \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \beta \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
(9.92)

La dérivation de (9.87) et (9.88) par rapport à z, t permet d'aboutir aux équations suivantes:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial t^2} = f \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} - N^2 \frac{\partial w}{\partial x},\tag{9.93}$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^2} = -f \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} - N^2 \frac{\partial w}{\partial y},\tag{9.94}$$

menant finalement à

$$f\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial t^2} = f^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} - f N^2 \frac{\partial w}{\partial x},$$
(9.95)

$$\frac{\partial^4 v}{\partial z \partial t^3} = -f \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial t^2} - N^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t},$$
(9.96)

dont la soustraction l'une de l'autre fournit

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} - f \frac{\partial w}{\partial x} = -N^{-2} \left( \frac{\partial^3}{\partial t^3} + f^2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial v}{\partial z},\tag{9.97}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial^3}{\partial t^3} + f^2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( N^{-2} \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0$$
(9.98)

Une solution en séparation de variables (C.L ???)  $v = v_n(x, y, t)\phi_n(z)$  réduit le problème à un prolème de Sturm-Liouville:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(N^{-2}\frac{\mathrm{d}Z_n}{\mathrm{d}z}\right) + \frac{1}{gh_n}Z_n = 0 \tag{9.99}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial v_n}{\partial x} - \left( \frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3} + f^2 \frac{\partial v_n}{\partial t} \right) = 0$$
(9.100)

où nous avons introduit la constante de séparation  $gh_n$ .  $h_n$  est appellé la profondeur équivalent, et on calcule le rayon de déformation du mode n par  $R_n = \sqrt{(gh_n)f^{-1}}$ . UTilise pour calculer les rayons de déformations LOCAUX; partiellement incohérent avec l'hypothèse de base d'homogénéité horizontale.

Modes internes, vérifier ce que cela donne en coordonnées isopycnales avec superposition du mode geostrophique

# 9.15 Séparation de facteurs

Généralement, les études de sensibilité se limitent à une simulation dans laquelle on varie un paramètre afin d'analyser l'impact d'une telle variation sur le résultat de l'étude. Cependant, si plusieurs paramètres sont susceptibles d'influencer la solution, l'approche classique de les faire varier l'un après l'autre et de comparer à la simulation de référence peut conduire à de fausses

#### 9.15. SÉPARATION DE FACTEURS

conclusions. En effet, imaginons une simulation de contrôle (CON) pour le calcul de la circulation en Méditerranée, dans laquelle est inclue un forpar le Rhône et un rappel vers la salinité en surface. Nous pourrions étudier la présence du forpar la rivière en modifiant son débit (zéro dans un cas extrême, simulation NOR) et ensuite l'influence du rappel en surface en modifiant la valeur du coefficient de rappel (également zéro dans le cas extrême, simulation NOS). Nous pourrions alors analyser les différences NOR-CON et NOS-CON afin de les interpréter de faclassique comme isolant l'influence des la rivière et du rappel en surface respectivement. Cependant, c'est oublier que le rappel de surface contient le signal climatique de la rivière et que les deux facteurs interagissent donc.

Il conviendrait de trouver un méthode qui permettre de tenir compte de ces interactions. Ici, nous présentons la méthode de séparation en facteurs [?].

S'il n'y avait qu'un facteur, nous pourrions dire que le résultat de la simulation dépend d'un facteur s qui prend la valeur 0 si le processus est absent et 1 s'il est inclu. Dans ce cas, la solution, résumé par n'importe quel outil de diagnostique décrit précedemment, dépend de ce paramètre s. La solution  $\psi$  peut alors se décomposer en une partie qui ne dépend pas de ce paramètre  $\psi_0$ , et une partie due â l'inclusion du paramêtre  $\psi_1$ . Bien sûr, il est facile de déterminer ces deux parties par deux simulations. Une simulation avec s = 0 fournit la solution  $\psi(0)$  et s = 1 la solution  $\psi(1)$ . On a ensuite

$$\psi(1) = \psi_0 + \psi_1 \tag{9.101}$$

$$\psi(0) = \psi_0 \tag{9.102}$$

de sorte que nous avons, sans surprise,

$$\psi_0 = \psi(0) \tag{9.103}$$

$$\psi_1 = \psi(1) - \psi(0) \tag{9.104}$$

et la dernière relation nous fournit la contribution du seul facteur s.

Quand il y a plusieurs facteurs, nous pouvons dire que la solution dépend des ces paramètres:

$$\psi = \psi(s_1, s_2, \dots, s_n) \tag{9.105}$$

Nous pouvons alors decomposer de la fasuivante

$$\psi = \psi_0 + \sum_i \psi_i(c_i) + \sum_i \psi_{ij}(c_i, c_j) + \sum_i \psi_{ijk}(c_i, c_j, c_k) + \dots$$
(9.106)

toute fonction  $\psi_{ijk...}(...c_i, c_j, c_k, ...)$  est nulle si un des facteurs  $c_i$  est nul. Ceci veut dire que  $\psi_{ijk...}(...c_i, c_j, c_k, ...)$  désigne l'influence conjointe des facteurs  $c_i, c_j, c_k, \psi_i(c_i)$  l'influence du seul facteur  $c_i$  etc. Taylor,  $s_i$  petits, alors analyse de sensibilité classique, superposition des réponses car variations des causes petites. Sinon, comme c'est souvent le cas, (ex. influence présence, abscence de topographie et stratification), les dérivées supérieures (actions conjointes) doivent être pris en compte

Pour relier ces fonctions à des resultats de simulations, il suffit d'effectuer  $2^n$  simulations avec toutes les combinaisons possibles de  $c_i = 0$  ou  $c_i = 1$  ce qui permet d'itendifier

$$\psi(0, 0, 0..., 0) = \psi_0 \tag{9.107}$$

$$\psi(0, 0, ..., 1, 0...) = \psi_O + \psi_i(c_i = 1)\psi($$
(9.108)

Il suffit d'inverser cette séquence pou récuperer l'information souhaitée.

Example: Med, 6 mois, river, noriver, relax, norelax

Un problème particulier de cette méthode (en plus du problème évident du coût en  $2^n$ ) est bien entendu lié au choix des variables dont on étudie l'effet. Ainsi, [?] l'importance de la contribution d'un facteur varie en fonction du type et du nombre des autres facteurs intervenant dans l'analyse. Géneralement, puisque les processus ne sont pas indépendants, l'ajout de facteurs diminue la contribution individuelle d'un seul facteur en faveur des contributions conjointes

Si une méthode de 'eparation de facteurs n'est pas menée jusquáu bout, il faut au moins realiser les expériences en ne modifiant qu'un facteur à la fois, afin de pouvoir au moins identifier ....

Il va de soi que les expériences de sensitivité doivent introduire des variations suffisemment fortes pour générer un signal détectable, mais suffissement faible pour rester réaliste et ne pas mener le modèle dans un autre mode de fonctionnement.

Le fait qu'un étude de sensitivité demande une perturbation suffisemment forte est due au fait que si la perturation était petite, nous aurions deux réalisations d'une expérience, mais que la différence entre les deux simulations ne soit significative pour une interprétation en termes de différences de l'entrée. En effet, statistiquement la différence ne serait significative que si l'on arrive à prouver que chacune des deux réalisations est une bonne estimation de l'état moyen statistique. Pour cela il faudrait effectuer un ensemble de prédictions de l'expérience de contrôle dans laquelle on modifie alátoirement des paramètres, et ensuite un ensemble de prédictions (également par modifications alátoires des paramètres) dans laquelle on a modifié (de fapermanente) la fonction d'entrée dont on veut étudier la sensitivié. Ensuite on devrait comparer les moyennes et vérifier que leur différence inter-expérience est statistiquement significative eu égard de la variabilité intra-expériences.

En pratique, en se libère de cette obligation par une utilisation d'un changement de la fonction d'entrée suffisemment forte et une connaissance subjective de la variabilité typique des simulations.

Analyse de données: analysis of multifactor experiments [?] p522ff

# Part II

# **Modèles numériques complets**

# Chapter 10 Modèle 1D

Ici, nous allons nous concentrer sur le cas où la mer est homogène horizontalement. Cette hypothèse est satisfaite localement dans une mer, si les longueurs caractéristiques horizontales sont suffisamment grandes. Dans ce cas, nous pouvons négliger les dérivations selon l'horizontale, et concentrer notre attention sur l'adaptation de l'écoulement aux forçages des couches de mélange en surface et au fond. Nous allons donc étudier ces couches par une approche d'étude de couche limite où nous allons négliger les variations horizontales devant les variations verticales associées à la couche limite.

## **10.1 Equations**

Dans cette approximation, l'équation de la conservation de la masse se réduit à

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{10.1}$$

Puisque nous négligeons aussi les variations horizontales de la profondeur<sup>1</sup>, nous avons la condition limite au fond (z = 0)

$$w(0) = 0 \to w(z) = 0, \quad \forall z.$$
 (10.2)

Cette égalité pour tout z entraîne que, selon la verticale, l'équation de la quantité de mouvement se réduit à l'équilibre hydrostatique, sans aucune autre hypothèse préalable.

$$\frac{\partial q}{\partial z} = b. \tag{10.3}$$

Or le champ de poussée est aussi indépendant des coordonnées horizontales et, par conséquent, en prenant les dérivées selon x et y de (10.3), nous avons

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial q}{\partial y} \right) = 0.$$
(10.4)

Et nous voyons que si nous ne négligeons pas a priori le gradient horizontal de pression (parce qu'il est une force imposée extérieure), il faut néanmoins, pour être cohérent, admettre que cette force est indépendante de z.

Les équations de quantité de mouvement se réduisent alors à

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \tilde{\nu} \frac{\partial u}{\partial z} \right], \qquad (10.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu - \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \tilde{\nu} \frac{\partial v}{\partial z} \right], \qquad (10.6)$$

où  $\tilde{\nu}$  est le coefficient de diffusion (turbulent dans une mer réelle).

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Au cas où le fond est incliné, on peut tout de même étudier de la couche d'Ekman au fond en introduisant des coordonnées et vitesses dont la "verticale" est perpendiculaire au fond (voir par exemple [?]).

# 10.2 Modèle 1D à fermeture turbulente

Dans ce chapitre, il s'agit de développer une méthode de résolution numérique des équations non-linéaires du chapitre ??, simplifiées pour une situation 1D, mais complétées par une formulation appropriée de la longueur de mélange ou de la dissipation  $\epsilon$ .

#### **10.2.1 Equations 1D**

Si nous partons des équations du chapitre 2, en faisant la même démarche qu'au début de ce chapitre, nous obtenons les équations 1D suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \tilde{\nu} \frac{\partial u}{\partial z} \right], \qquad (10.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu - \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \tilde{\nu} \frac{\partial v}{\partial z} \right], \qquad (10.8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \tilde{\lambda}^T \frac{\partial T}{\partial z} \right], \tag{10.9}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \tilde{\lambda}^S \frac{\partial S}{\partial z} \right], \tag{10.10}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \tilde{\nu}M^2 - \tilde{\lambda}^b N^2 - \epsilon + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \tilde{\lambda}^k \frac{\partial k}{\partial z} \right], \qquad (10.11)$$

A cela, nous pouvons ajouter une équation pour la dissipation  $\epsilon$ 

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\epsilon}{k} \left( c_1 P + c_3 B - c_2 \epsilon \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\tilde{\lambda}^k}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right], \qquad (10.12)$$

où nous avons défini la fréquence de Prandtl M et la fréquence de Brunt - Väisälä N par

$$M^2 \equiv \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right\|^2 \tag{10.13}$$

$$N^2 \equiv \frac{\partial b}{\partial z} \tag{10.14}$$

ainsi que la production de turbulence par cisaillement

$$P = \tilde{\nu}M^2, \tag{10.15}$$

et la dissipation de turbulence par stratification

$$B = -\tilde{\lambda}^b N^2. \tag{10.16}$$

Afin de fermer le système, on doit relier la diffusion turbulente aux paramètres caractérisant la turbulence, à savoir l'énergie cinétique turbulente k et sa dissipation  $\epsilon$ . Par des considérations dimensionnelles, on calcule

$$\tilde{\nu} = (c^0_\mu)^3 c_\mu \frac{k^2}{\epsilon},\tag{10.17}$$

ainsi que

$$\tilde{\lambda}^{T} = (c_{\mu}^{0})^{3} c_{\mu}^{\prime} \frac{k^{2}}{\epsilon}.$$
(10.18)

Les facteurs de proportionalité sont en réalité affectés par la stratification et le cisaillement, et une paramétrisation courante est

$$c_{\mu} = \frac{s_0 + s_1 \alpha_N + s_2 \alpha_M}{1 + d_1 \alpha_N + d_2 \alpha_M + d_3 \alpha_N^2 + d_4 \alpha_N \alpha_M + d_5 \alpha_M^2},$$
(10.19)

$$c'_{\mu} = \frac{s_4 + s_5\alpha_N + s_6\alpha_M}{1 + d_1\alpha_N + d_2\alpha_M + d_3\alpha_N^2 + d_4\alpha_N\alpha_M + d_5\alpha_M^2},$$
(10.20)

avec

$$\alpha_M = (c_\mu^0)^6 \frac{k^2}{\epsilon^2} M^2, \tag{10.21}$$

et

$$\alpha_N = (c_\mu^0)^6 \frac{k^2}{\epsilon^2} N^2.$$
(10.22)

A titre d'exemple, nous donnons une liste de valeurs des paramètres.

$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_4$	$s_5$	$s_6$
0.7311	5.5528	-0.0386	0.7655	1.4414	0.2805

 Table 10.1 : Paramètres pour les fonctions de stabilité.

$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$c^0_\mu$
11.9251	1.3405	18.9086	11.3796	-0.0735	0.527

 Table 10.2 : Paramètres pour les fonctions de stabilité.

$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\sigma_{\epsilon}$
1.44	1.92	-0.629	1.2

**Table 10.3 :** *Paramètres pour l'équation de*  $\epsilon$ *.* 

Des détails sur la fermeture turbulente présentée peuvent être trouvés sur http://www.gotm.net.

Nous constatons que nous avons utilisé une équation pour la température T et une équation pour la salinité S au lieu d'une équation pour la poussée b. Ceci suppose que l'on calcule la poussée par une équation d'état. Dans notre cas, nous admettons que la colonne d'eau possède une salinité caractéristique de 35 et une température caractéristique de 15°. La poussée peut alors être calculée à partir de

$$b(\delta S, \delta T) = \frac{g}{\rho_0} \{ 0.2196077\delta T + 0.00621795\delta T^2 - \delta S(0.771161 - 0.001814\delta T) \}, \quad (10.23)$$
  
$$\delta S = S - 35.00; \quad \delta T = T - 15^\circ, \quad \rho_0 = 1025.9731 \, \mathrm{kgm}^{-3}. \quad (10.24)$$

~

#### 10.2.2 Stratification et longueur de mélange

La dissipation  $\epsilon$  au lieu d'être calculée par une équation d'évolution basée sur une paramétrisation, peut, elle-même, être paramétrisée directement<sup>2</sup>.

Nous avons toujours

$$\epsilon = \alpha_0^4 \frac{k^2}{\tilde{\nu}}; \quad \alpha_0 = 0.5 \tag{10.25}$$

mais à présent, il faut considérer que  $\tilde{\nu}$  peut être calculé en fonction des variables du problème. Comme indiqué au chapitre ??, on peut calculer la viscosité turbulente par

$$\tilde{\nu} = \alpha_0 \sqrt{k} \mathcal{L}, \tag{10.26}$$

où  $\mathcal{L}$  est une longueur de mélange.

Dans le cas d'une colonne d'eau stratifiée, [?]

$$R_i = \frac{N^2}{M^2},$$
 (10.27)

$$R_f = \frac{\tilde{\lambda}^b N^2}{\tilde{\nu} M^2},\tag{10.28}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \psi(R_f); \quad \psi = 1 - R_f \tag{10.29}$$

$$\tilde{\lambda}^T = \tilde{\lambda}^S = \tilde{\lambda}^b = \tilde{\nu}\Phi(R_f); \quad \Phi = \gamma\sqrt{(1 - R_f)}$$
(10.30)

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{K}z\left(1 - \delta \frac{z}{H}\right), \mathcal{K} = 0.4.$$
(10.31)

$$\gamma = 1.1 - 1.4; \quad \delta = 0.5 - 1.0; \quad \tilde{\lambda}^k = \tilde{\nu}$$
 (10.32)

# **Exercices**

#### **Discrétisations**

Nous allons à présent décrire une méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles : la méthode des volumes finis.

La méthode des volumes finis (qui est une variante de la méthode des différences finies) est en fait basée sur l'approche préconisée pour établir les équations aux dérivées partielles du système.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>au lieu de résoudre une équation approchée, on essaie directement de formuler une approximation à l'inconnue.



Figure 10.1 : Grille verticale 1D.

Dans ce dernier cas en effet, on réalise un bilan sur un volume quelconque et, ensuite, on fait tendre la taille du volume vers zéro pour remplacer les différences de flux par les dérivées et la valeur moyenne de l'inconnue dans le volume par sa valeur locale. Dans la méthode des volumes finis, on procède de la même façon, en maintenant toutefois le volume à une dimension finie. Alors que, dans une méthode aux différences finies classique, les dérivées sont remplacées par leur développement en série de Taylor, la méthode des volumes finis est une méthode plus physique que mathématique. Les deux méthodes fournissent, dans des cas simples (e.g. équations linéaires à coefficients constants), les mêmes équations discrètes; mais la méthode aux volumes finis possède l'avantage de se généraliser plus facilement à des cas plus complexes, tout en assurant, par exemple, la conservation. Nous examinerons par la suite la méthode des volumes finis appliquée à notre modèle.

Si nous intégrons l'équation type suivante

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = Q^{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \tilde{\lambda}^{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial z} \right]$$
(10.33)

sur une maille de la grille représentée à la figure (10.1), nous trouvons l'équation d'évolution pour la valeur moyenne de la variable d'état dans cette maille

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{y}}}{\partial t} = \bar{Q^{\mathbf{y}}} - \frac{1}{\Delta z_k} \left\{ J\left(z_k + \frac{\Delta z_k}{2}\right) - J\left(z_k - \frac{\Delta z_k}{2}\right) \right\}$$
(10.34)

$$J(z_{\star}) = -\tilde{\lambda}^{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial z} \bigg|_{z=z_{\star}}$$
(10.35)

$$\bar{\cdot} = \frac{1}{\Delta z_k} \int_{z_k - \frac{\Delta z_k}{2}}^{z_k + \frac{\Delta z_k}{2}} \cdot \mathrm{d}z \tag{10.36}$$

Pour obtenir une méthode de résolution, il "suffit" de calculer les flux discrets et de choisir un schéma de discrétisation temporelle. Nous sommes à présent déjà en mesure d'exploiter certains avantages de la discrétisation choisie. En effet, le schéma permet non seulement un contrôle facile de la conservation (tout ce qui sort d'une maille rentre dans la suivante), mais aussi une implémentation aisée des conditions aux limites (il suffit de substituer les flux en surface aux flux discrets). La conservation est, bien entendu, primordiale dans le cadre d'une étude de dispersion de polluants, de bilan thermique ou de salinité (surtout dans des simulations portant sur plusieurs mois).

#### **Terme de production - destruction**

Supposons que le terme source  $Q^y$  des équations générales puisse se décomposer en sa partie de production  $P^y \ge 0$  et sa composante de destruction  $D^y \ge 0$  tel que  $Q^y \equiv P^y - D^y$  avec les propriétés suivantes<sup>3</sup>

$$y \ge 0, \tag{10.37}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^* \quad \Rightarrow \quad P^{\mathbf{y}} = D^{\mathbf{y}}, \tag{10.38}$$

$$\mathbf{y} > \mathbf{y}^* \quad \Rightarrow \quad P^{\mathbf{y}} < D^{\mathbf{y}}, \tag{10.39}$$

$$\mathbf{y} < \mathbf{y}^* \quad \Rightarrow \quad P^{\mathbf{y}} > D^{\mathbf{y}} \tag{10.40}$$

La solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = P^{\mathbf{y}} - D^{\mathbf{y}},\tag{10.41}$$

$$y(t=0) = y_0.$$
 (10.42)

possède la caractéristique suivante

$$\mathbf{y}_0 \ge ^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}(t) \ge \mathbf{y}^*, \tag{10.43}$$

$$\mathbf{y}_0 \le \mathbf{y}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}(t) \le \mathbf{y}^*,$$
 (10.44)

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{y} = \mathbf{y}^*. \tag{10.45}$$

Nous allons à présent développer une méthode de discrétisation de l'équation (10.41) qui soit, à la fois, à un seul pas de temps et qui n'engendrera pas la nécessité de résoudre une équation non-linéaire (sinon la généralisation à une discrétisation 1D complète est compromise). Nous proposons donc de discrétiser l'équation comme suit<sup>4</sup>

$$\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{y}^n + \Delta t \left\{ \frac{P^{\mathbf{y}^n}}{\mathbf{y}^n} \left( \iota \mathbf{y}^{n+1} + (1-\iota) \mathbf{y}^n \right) - \frac{D^{\mathbf{y}^n}}{\mathbf{y}^n} \left( \theta \mathbf{y}^{n+1} + (1-\theta) \mathbf{y}^n \right) \right\}.$$
 (10.46)

Cette expression linéaire en  $y^{n+1}$  est résolue afin de calculer

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Le lecteur vérifie sans peine que ces hypothèses sont typiquement satisfaites dans le cadre des formulations des lois d'évolution d'une seule composante biologique. Dans le cas où plusieurs espèces interagissent, notre analyse reste d'application pour les termes d'interaction qui varient lentement.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> l'indice supérieur n désigne l'instant t, alors que n + 1 désigne le nouvel état à l'instant  $t + \Delta t$ .

$$\mathbf{y}^{n+1} = (1+\epsilon)\mathbf{y}^n, \tag{10.47}$$

$$\epsilon \equiv \frac{P^{\mathbf{y}} - D^{\mathbf{y}}}{\frac{\mathbf{y}^{n}}{\Delta t} - (\iota P^{\mathbf{y}^{n}} - \theta D^{\mathbf{y}^{n}})}.$$
(10.48)

Pour que le schéma discret donne une solution qui possède les mêmes propriétés qualitatives que la solution exacte (la précision quantitative pouvant être obtenue en diminuant le pas de temps), il faut que les trois conditions suivantes<sup>5</sup> soient satisfaites

$$\mathbf{y} > \mathbf{y}^* \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{y}^* - \mathbf{y}}{\mathbf{y}} < \epsilon < 0,$$
 (10.49)

$$\mathbf{y} < \mathbf{y}^* \quad \Rightarrow \quad 0 < \epsilon < \frac{\mathbf{y}^* - \mathbf{y}}{\mathbf{y}},$$
(10.50)

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^* \quad \Rightarrow \quad \epsilon = 0. \tag{10.51}$$

La troisième condition étant rencontrée, il est alors aisé de prouver que la condition  $\epsilon < 0$  ( $\epsilon > 0$ ) au cas où y > y<sup>\*</sup> ( y < y<sup>\*</sup>) nécessite

$$\frac{\mathbf{y}}{\Delta t} - (\iota P^{\mathbf{y}} - \theta D^{\mathbf{y}}) > 0.$$
(10.52)

D'autre part, les deux autres conditions peuvent s'écrire

$$|\epsilon| < \left|\frac{\mathbf{y}^* - \mathbf{y}}{\mathbf{y}}\right|,\tag{10.53}$$

ce qui, à l'aide de l'inégalité (10.37) et des deux propriétés (10.39) - (10.40), devient

$$\frac{1}{\Delta t} \ge \frac{P^{\mathbf{y}} - D^{\mathbf{y}}}{\mathbf{y}^* - \mathbf{y}} + \frac{\iota P^{\mathbf{y}} - \theta D^{\mathbf{y}}}{\mathbf{y}}.$$
(10.54)

Cette dernière condition est plus restrictive que (10.52) et est donc la seule condition qui subsiste. La condition (10.54) permet aussi de calculer un pas de temps maximum  $\Delta t_{max}$  admissible

$$\frac{1}{\Delta t_{max}} = \max_{\mathbf{y}} \left\{ \frac{P^{\mathbf{y}} - D^{\mathbf{y}}}{\mathbf{y}^* - \mathbf{y}} + \frac{\iota P^{\mathbf{y}} - \theta D^{\mathbf{y}}}{\mathbf{y}} \right\},\tag{10.55}$$

où la recherche du maximum peut se limiter au domaine délimité par les conditions initiales extrêmes et la valeur d'équilibre y<sup>\* 6</sup>.

Il est clair, d'après la condition (10.55), que l'on aurait intérêt à choisir  $\iota = 0$ ,  $\theta = 1$  pour augmenter le pas de temps admissible, mais il pourrait être opportun de choisir d'autres valeurs pour accroître la précision.

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> Comme précédemment, pour la clarté de l'écriture, nous avons omis d'indiquer l'indice n.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> Si le second membre est négatif, il est sous-entendu que le pas de temps est illimité !

A titre d'exemple, nous pouvons considérer une loi logistique pour la croissance d'une espèce biologique déterminée : (en variables adimensionnelles)

$$P^{\mathbf{y}} = \mathbf{y},\tag{10.56}$$

$$D^{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^2,$$
 (10.57)

$$y^* = 1,$$
 (10.58)

$$\Delta t_{max} = \frac{1}{\mathbf{y}_{max}(1-\theta) + \iota}.$$
(10.59)

Ainsi, nous pouvons augmenter le pas de temps en diminuant  $\iota$  ou en augmentant  $\theta$ . De même, pour l'équation de l'énergie cinétique turbulente (adimensionnelle) k, nous avons

$$P^k = \sqrt{k}, \qquad (10.60)$$

$$D^k = k^{3/2}, (10.61)$$

$$k^* = 1,$$
 (10.62)

$$\Delta t_{max} = \min\left[\frac{1}{\sqrt{k_{max}}(1-\theta) + \frac{\iota}{\sqrt{k_{max}}}}, \frac{1}{\sqrt{k_{min}}(1-\theta) + \frac{\iota}{\sqrt{k_{min}}}}\right].$$
 (10.63)

#### Terme de diffusion

La discrétisation spatiale des flux diffusifs s'écrit naturellement comme

$$J\left(z_{k}-\frac{\Delta z_{k}}{2}\right)=-\tilde{\lambda}_{k_{i}}^{\mathbf{y}}\frac{\left(\mathbf{y}_{k}-\mathbf{y}_{k-1}\right)}{\left(\Delta z_{k}+\Delta z_{k-1}\right)/2}$$
(10.64)

où nous avons désigné par  $\tilde{\lambda}_{k_i}^{\mathbf{y}}$  la valeur du coefficient de diffusion à l'interface entre la maille k-1 et k.<sup>7</sup>. Ceci montre que l'on a intérêt à définir les coefficients de diffusion aux interfaces entre les mailles. Quant à la discrétisation temporelle, nous pouvons prendre un schéma implicite caractérisé par un taux d'implicité  $\alpha$  de sorte que l'on écrit

$$\bar{\mathbf{y}}_{k}^{n+1} = \bar{\mathbf{y}}_{k}^{n} + \Delta t \overline{Q^{\mathbf{y}}} - \frac{\Delta t}{\Delta z_{k}} \\
\left( \alpha \left[ -\tilde{\lambda}_{k+1_{i}}^{\mathbf{y}} \frac{(\mathbf{y}_{k+1}^{n+1} - \mathbf{y}_{k}^{n+1})}{(\Delta z_{k} + \Delta z_{k+1})/2} + \tilde{\lambda}_{k_{i}}^{\mathbf{y}} \frac{(\mathbf{y}_{k}^{n+1} - \mathbf{y}_{k-1}^{n+1})}{(\Delta z_{k} + \Delta z_{k-1})/2} \right] \\
+ (1 - \alpha) \left[ -\tilde{\lambda}_{k+1_{i}}^{\mathbf{y}} \frac{(\mathbf{y}_{k+1}^{n} - \mathbf{y}_{k}^{n})}{(\Delta z_{k} + \Delta z_{k+1})/2} + \tilde{\lambda}_{k_{i}}^{\mathbf{y}} \frac{(\mathbf{y}_{k}^{n} - \mathbf{y}_{k-1}^{n})}{(\Delta z_{k} + \Delta z_{k-1})/2} \right] \right)$$
(10.65)

où nous pouvons remplacer les valeurs locales par leur valeurs moyennes sur la maille correspondante.

La discrétisation donne donc lieu à la résolution d'un système linéaire tridiagonal, que l'on résoudra par l'algorithme classique de décomposition LU des matrices bandes (voir annexe).

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup> Cette interface ne se trouve à mi-distance entre les centres des mailles adjacentes que pour une grille uniforme. Par contre, le centre des mailles se trouve toujours à mi-distance entre les deux interfaces avec les mailles adjacentes.

#### Terme de Coriolis

Si nous considérons le système

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = -f\mathbf{e}_3\Lambda\mathbf{u},\tag{10.66}$$

nous pouvons facilement montrer que

$$\frac{\mathrm{d}\|\mathbf{u}\|^2}{\mathrm{d}t} = 0,\tag{10.67}$$

Une des caractéristiques de la force de Coriolis est donc que son travail mécanique est nul. Il ne faudrait donc pas que la discrétisation numérique crée un travail mécanique systématique. Il est aisé de constater que la discrétisation simple

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n - f\Delta t \mathbf{e}_3 \Lambda \mathbf{u}^n, \tag{10.68}$$

va engendrer une vitesse dont la norme ne cesse d'augmenter. Nous pouvons éliminer le problème en ajoutant un terme de friction numérique ajusté pour que le travail mécanique total soit nul. En effet en considérant le schéma

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n - f\Delta t \mathbf{e}_3 \Lambda \mathbf{u}^n - \Delta t K_f \mathbf{u}^{n+1}, \qquad (10.69)$$

$$K_f \equiv \frac{\sqrt{1 + f^2 \Delta t^2 - 1}}{\Delta t}.$$
 (10.70)

qui n'est qu'un cas particulier de

$$\mathbf{u}^{n+1} = a\mathbf{u}^n - b\mathbf{e}_3\Lambda\mathbf{u}^n,\tag{10.71}$$

dont la solution s'écrit

$$\mathbf{u}^{n} = (\sqrt{a^{2} + b^{2}})^{n} \left\{ \mathbf{u}^{0} \cos(n\Delta t\omega^{N}) - (\mathbf{e}_{3}\Lambda \mathbf{u}^{0}) \sin(n\Delta t\omega^{N}) \right\},$$
(10.72)

$$\omega^N \equiv \frac{1}{\Delta t} \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right). \tag{10.73}$$

et le schéma conserve l'énergie si

$$a = \frac{1}{1 + \Delta t K_f},\tag{10.74}$$

$$b = \frac{f\Delta t}{1 + \Delta t K_f},\tag{10.75}$$

Si ajouter un terme de friction artificiel nous heurte, nous pouvons aussi discrétiser le terme de Coriolis de la manière suivante

$$u^{n+1} = u^n + f\Delta t v^n, \tag{10.76}$$

$$v^{n+1} = v^n - f\Delta t u^{n+1}, (10.77)$$

$$v^{n+2} = v^{n+1} - f\Delta t u^{n+1}, \tag{10.78}$$

$$u^{n+2} = u^{n+1} + f\Delta t v^{n+2}, (10.79)$$

Ce dernier schéma consiste donc à simplement utiliser dans le terme de Coriolis l'information la plus récente ! Afin de conserver une symétrie dans le calcul, l'ordre de calcul de u et v est inversé à chaque itération.

#### **Simulations**

En partant d'une situation initiale stratifiée, simuler l'effet d'un coup de vent. Comparer aux résultats analytiques.

#### Oscillations d'inertie du transport

En partant de l'équation (??) avec  $\tau^b = 0$ , trouver une solution instationnaire en appliquant par exemple la méthode de Laplace et en prenant comme cas particulier  $\tau^s = \tau_0^s \gamma(t)$  où  $\tau_0^s$  est une constante et  $\gamma(t)$  la fonction de Heavyside. Dans ce cas, montrer que l'oscillation d'inertie fait que le vecteur W tourne autour de sa valeur d'équilibre.

#### **Oscillations amorties du transport**

Reprendre le problème 21 , mais avec  $\tau^b = \delta \overline{W}$ . Estimer la valeur de  $\delta$ . Est-ce une valeur réelle ou complexe ?

#### Structure verticale stationnaire pour $\tilde{\nu}$ constant

Reprendre les problèmes ?? et ?? mais pour un océan à profondeur finie h. Monter que la solution est un matching des solutions précédentes. Faites apparaître le nombre d'Ekman  $E_v = \frac{2\tilde{\nu}}{fh^2}$ .

#### Solution instationnaire

Calculer les valeurs propres et fonctions propres de (??) pour les deux cas suivants

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 \tag{10.80}$$

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 \frac{h + x_3}{h} \left( 1 - 0.5 \frac{h + x_3}{h} \right)$$
(10.81)

#### Solution instationnaire pour un océan de profondeur infinie

Reprendre le problème **??**, mais pour un océan de profondeur infinie partant du repos et avec un coefficient de diffusion constant. Montrer que la solution pour le vecteur vitesse en surface peut s'exprimer en fonction des intégrales de Fresnel.

#### Spirale d'Ekman dans le cas d'une couche logarithmique de fond

Chercher la solution de l'équation (??) où  $\tilde{\nu} = u_* \mathcal{K} z$ .

#### **Ekman pumping**

En faisant le bilan de masse pour la situation décrite par la (??), calculer la vitesse verticale et retrouver (??).

#### Calcul de la vitesse vertical au-dessus de la couche d'Ekman d'un fond incliné

A partir du profil de vitesses de la couche d'Ekman du fond (??), calculer la vitesse verticale en fonction du champ du courant géostrophique au-dessus d'un fond z = -h(x, y). Montrer que

$$u_3^b = \sqrt{\frac{\tilde{\nu}}{2f}} \mathbf{e}_3 \cdot (\nabla \Lambda \mathbf{u}_g) - \mathbf{u}_g \cdot \nabla h$$
(10.82)

Interpréter.

#### Interprétation de l'Ekman pumping au fond

A partir de (??), calculer le transport dans la direction parallèle au courant géostrophique et perpendiculaire au courant géostrophique. Calculer ensuite la quantité entrante à travers une courbe fermée dans un plan horizontal. Montrer que la contribution du flux parallèle au courant géostrophique s'annulle et que seule la composante perpendiculaire donne un effet net non nul. Ensuite, en invoquant la conservation de la masse et le caractère arbitraire de la courbe sur laquelle on intègre, montrer que la vitesse verticale est bien donnée par (??).

#### Force de Coriolis

Examiner la discrétisation suivante du terme de Coriolis

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n - f\Delta t \mathbf{e}_3 \Lambda\{(1-\beta)\mathbf{u}^n + \beta \mathbf{u}^{n+1}\}$$
(10.83)

Quel est le comportement de la solution discrète en fonction de la valeur de  $\beta$ ? Quel est le problème si l'on veut généraliser ce schéma à une discrétisation 1D?

#### Conditions de stabilité numérique

Trouver la condition de stabilité du schéma de diffusion, dans le cas où les mailles sont uniformes et les coefficients de diffusion sont constants. Comment pourrait-on ajouter un terme de migration (vitesse verticale imposée) au schéma ? Quelle serait la condition de stabilité ?

# Conditions de stabilité numérique

Examiner la stabilité du schéma (10.76) - (10.79) et montrer qu'il est stable si et seulement si  $f^2 \Delta t^2 \leq 1$ .

# Chapter 11

# Modèle de vorticité 2D

Une étude répandue parmi les océanographes est celle basée sur la vorticité. Nous allons en présenter une version simplifiée qui montrera notamment l'effet  $\beta$  et la 'western intensification' due aux ondes de Rossby. Nous allons en écrire les équations et discuter quelques détails de la résolution numérique sur un ordinateur vectoriel. Une application dans un cas plus ou moins réaliste servira alors de test du schéma.

### **11.1 Equations**

Nous avons déjà montré (cfr. **??**) que les équations hydrodynamiques peuvent être intégrées selon la verticale entre deux couches imperméables (pas nécessairement le fond et la surface), pour donner des équations pour le transport

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}_h \cdot (H\mathbf{u}) = 0, \qquad (11.1)$$

$$\frac{\partial H\mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}_h \cdot (H\mathbf{u}\mathbf{u}) + f\mathbf{e}_3 \Lambda H\mathbf{u} = \mathbf{B} - H\boldsymbol{\nabla}_h q_s + \boldsymbol{\tau}^s - \boldsymbol{\tau}^b + \tilde{\kappa} \Delta_h (H\mathbf{u}).$$
(11.2)

oùHest la hauteur sur laquelle nous avons intégré,Bun terme qui tient compte de l'effet de différence de densité (barocline), $\tau^s, \tau^b$ sont respectivement les tensions en surface et en bas de la couche, $\tilde{\kappa}$ est un coefficient de diffusion tenant compte de l'effet cisaillant , $q_s$ est la valeur de la pression généralisée en surface.

Pour l'étude que nous allons effectuer, nous utilisons l'approximation du rigid-lid qui consiste à négliger  $\frac{\partial H}{\partial t}$  dans (11.1) et d'évaluer  $H \sim h$ . Nous avons déjà montré (??) que c'est une approximation valable si nous nous intéressons aux grandes échelles de temps et que nous voulons en fait filtrer les ondes de gravité de surface rapides. Pour pouvoir négliger ce terme, il faut en effet que le nombre sans dimension  $\epsilon_{\zeta}$  satisfasse

$$\epsilon_{\zeta} = R_o \left(\frac{L}{R_E}\right)^2 = \frac{ULf}{gh} \ll 1, \tag{11.3}$$

où  $R_o$ ,  $R_E$  sont le nombre de Rossby et le rayon de déformation externe de Rossby définis auparavant.

Nous pouvons donc définir une fonction de courant  $\psi$  telle que

$$Hu = -\frac{\partial \psi}{\partial y},\tag{11.4}$$

$$Hv = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$
(11.5)

Nous pouvons aussi définir la vorticité du transport  $\omega$ 

$$\omega = \frac{\partial Hv}{\partial x} - \frac{\partial Hu}{\partial y}.$$
(11.6)

#### 11.1. EQUATIONS

La définition de la fonction de courant  $\psi$  nous assure que l'équation (11.1) est toujours satisfaite et il ne reste plus que l'équation (11.2) que nous pouvons transformer en une équation pour la vorticité en en prenant le rotationnel et en le projetant sur la verticale

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{1}{h}\mathcal{J}(\psi,\omega) + \frac{2}{h^2}\mathcal{J}(h,\psi)\nabla_h^2\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x}\beta = -\mathcal{J}(h,q_s) + \mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_h\Lambda\mathbf{B} + \nabla_h\Lambda\boldsymbol{\tau}^s - \nabla_h\Lambda\boldsymbol{\tau}^b) + \tilde{\kappa}\Delta_h\omega.$$
(11.7)

Pour établir cette équation, nous avons négligé les variations de profondeur d'ordre supérieur aux gradients.

Si B et  $\tau^s$  sont des données du problème,  $q_s$ ,  $\tau^b$  dépendent eux de l'écoulement. Or, leur influence dans l'équation (11.7) n'est pas dominante (faibles variations de profondeur et peu de frottements au fond d'un océan profond) et nous pouvons les approximer par les considérations suivantes.

On sait qu'à grande échelle, l'écoulement devient quasi-géostrophique. Il semble donc naturel d'approximer le terme inconnu  $\mathcal{J}(h, q_s)$  en liant les dérivées de  $q_s$  aux vitesses par la relation géostrophique

$$fHv \sim -H\frac{\partial q_s}{\partial x} + F_x \sim -f\frac{\partial \psi}{\partial x},$$
(11.8)

$$fHu \sim -H\frac{\partial q_s}{\partial y} + F_y \sim -f\frac{\partial \psi}{\partial y}.$$
(11.9)

(F est la somme des forces externes, vent et force barocline). En négligeant comme avant les variations d'ordre supérieur de la profondeur, nous pouvons donc évaluer

$$-\mathcal{J}(h,q_s) \sim -\frac{f}{h} \mathcal{J}(h,\psi) - \frac{1}{h} \left( F_y \frac{\partial h}{\partial x} - F_x \frac{\partial h}{\partial y} \right), \qquad (11.10)$$

terme dans lequel f peut être gardé constant.

En ce qui concerne le frottement au fond, nous pouvons l'estimer à partir des résultats de la couche d'Ekman sur le fond (voir ??). Nous y avions vu que la tension déduite à partir de l'écoulement géostrophique en dehors de la mince couche limite était tournée d'un angle  $\theta$  proche de 45° par rapport à la vitesse géostrophique et était donnée par une fonction dépendant de la vitesse géostrophique (assimilée à la vitesse moyenne puisque la couche d'Ekman est une mince couche limite par rapport à toute la hauteur de la couche d'eau) et d'un angle  $\theta$  plus petit que 45° pour un écoulement turbulent. On peut aussi trouver la forme de la couche d'Ekman sur un plan incliné et ainsi calculer le frottement en fonction de la topographie locale, de la vitesse géostrophique et de l'angle  $\theta : \tau^b = \mathbf{g}(\theta, H, \mathbf{u}) \sim \mathbf{g}(\theta, h, \psi)$ . En prenant le rotationnel, nous pouvons exprimer finalement tous les termes en fonction des inconnues  $\psi, \omega$  et des données externes  $H \sim h$ , B,  $\tau^s$ ,  $\theta, \beta, f, \tilde{\kappa}$ . En particulier, en prenant la solution de la couche d'Ekman au fond du chapitre ??, nous avons

$$\left(\boldsymbol{\nabla}_{h}\Lambda\boldsymbol{\tau}^{b}\right)\cdot\mathbf{e}_{3}=\sqrt{\frac{\tilde{\nu}f}{2}}\left(\frac{\partial v_{g}}{\partial x}-\frac{\partial u_{g}}{\partial y}\right)=\delta_{E}\frac{f}{2}\left\{\frac{1}{H}\nabla_{h}^{2}\psi-\frac{1}{H^{2}}(\boldsymbol{\nabla}_{h}H)\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{h}\psi)\right\},\quad(11.11)$$

où  $\delta_E = \sqrt{\frac{2\tilde{\nu}}{f}}$  est la hauteur de la couche d'Ekman du fond.

L'équation (11.7) ne possède donc plus que deux inconnues  $\psi, \omega$  qui peuvent cependant être reliées entre elles par la définition (11.4)-(11.6) pour livrer une seconde équation

$$\Delta_h \psi = \omega. \tag{11.12}$$

D'autre part, si on néglige la variation spatiale de la topographie et de la densité, l'équation (11.7) se simplifie en (11.13)

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{1}{h}\mathcal{J}(\psi,\omega) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\beta = \mathbf{e}_3 \cdot (\boldsymbol{\nabla}_h \Lambda \boldsymbol{\tau}^s) - \delta_E \frac{f}{2h}\omega + \tilde{\kappa} \Delta_h \omega.$$
(11.13)

# 11.2 Méthodes numériques

Les équations (11.7) et (11.12) sont en général impossibles à résoudre analytiquement et nous allons donc développer des méthodes de résolution numérique susceptibles de servir dans des problèmes plus complexes.

#### 11.2.1 Jacobien d'Arakawa

Arakawa a montré que la bonne discrétisation du Jacobien peut éviter des erreurs physiques. Il est parti des différentes possibilités d'écrire l'expression du Jacobien

$$\mathcal{J}(\alpha,\beta) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$
(11.14)

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)$$
(11.15)

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left( \beta \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)$$
(11.16)

$$=\frac{1}{2r}\left\{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-r\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}+r\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-r\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+r\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right\}$$
(11.17)

L'expression (11.17) du Jacobien est directement inspirée d'un changement de variables défini comme suit

$$\eta = x - \frac{y}{r} \tag{11.18}$$

$$\xi = x + \frac{y}{r} \tag{11.19}$$

Dans ce cas, nous avons en effet

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - r \frac{\partial}{\partial y} \right), \tag{11.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + r \frac{\partial}{\partial y} \right), \tag{11.21}$$

$$\mathcal{J}(\alpha,\beta) = \frac{2}{r} \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \frac{\partial \beta}{\partial \xi} - \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right\}.$$
 (11.22)

et

#### 11.2. MÉTHODES NUMÉRIQUES

Nous pouvons donc discrétiser le Jacobien sans problème selon une des formules (11.14)-(11.17)  $^{1}\,$ 

(11.14) donne

$$\mathcal{J}^{++} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \Big\{ (\alpha_{i+1,j} - \alpha_{i-1,j}) (\beta_{i,j+1} - \beta_{i,j-1}) - (\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j-1}) (\beta_{i+1,j} - \beta_{i-1,j}) \Big\},$$
(11.23)

(11.15) donne

$$\mathcal{J}^{+\times} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \Biggl\{ \alpha_{i+1,j} (\beta_{i+1,j+1} - \beta_{i+1,j-1}) \\ - \alpha_{i-1,j} (\beta_{i-1,j+1} - \beta_{i-1,j-1}) \\ - \alpha_{i,j+1} (\beta_{i+1,j+1} - \beta_{i-1,j+1}) \\ + \alpha_{i,j-1} (\beta_{i+1,j-1} - \beta_{i-1,j-1}) \Biggr\},$$
(11.24)

(11.16) donne

$$\mathcal{J}^{\times +} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \Biggl\{ \beta_{i,j+1} (\alpha_{i+1,j+1} - \alpha_{i-1,j+1}) \\ -\beta_{i,j-1} (\alpha_{i+1,j-1} - \alpha_{i-1,j-1}) \\ -\beta_{i+1,j} (\alpha_{i+1,j+1} - \alpha_{i+1,j-1}) \\ +\beta_{i-1,j} (\alpha_{i-1,j+1} - \alpha_{i-1,j-1}) \Biggr\},$$
(11.25)

alors que pour que la dernière formule (11.17) soit utile, il faut les iso- $\eta$  et iso- $\xi$  passent par les points discrets : il faut donc prendre  $r = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , auquel cas le Jacobien discrétisé selon (11.22) se présente comme

$$\mathcal{J}^{\times\times} = \frac{1}{8\Delta x \Delta y} \Big\{ (\alpha_{i+1,j-1} - \alpha_{i-1,j+1}) (\beta_{i+1,j+1} - \beta_{i-1,j-1}) - (\alpha_{i+1,j+1} - \alpha_{i-1,j-1}) (\beta_{i+1,j-1} - \beta_{i-1,j+1}) \Big\}.$$
(11.26)

En définitive, une forme valable pour le Jacobien, se basant uniquement sur les points qui l'entourent directement (facilité pour les conditions limites), est la suivante

$$\mathcal{J}^d = a\mathcal{J}^{++} + b\mathcal{J}^{\times +} + c\mathcal{J}^{+\times} + d\mathcal{J}^{\times \times}, \quad a+b+c+d = 1$$
(11.27)

Le choix des paramètres a+b+c+d nous donne la possibilité d'inclure des exigences mathématiques supplémentaires à l'exigence de la consistance. Par exemple,  $\mathcal{J}^{++}$  et  $\mathcal{J}^{\times\times}$  vérifient  $\mathcal{J}(\alpha, \beta) = -\mathcal{J}(\beta, \alpha)$ , alors que  $\mathcal{J}^{+\times}, \mathcal{J}^{\times+}$  ne vérifient pas cette propriété. Par contre, si nous prenons b = c, le Jacobien discrétisé selon (11.27) satisfait à cette propriété mathématique.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Le premier signe au dessus du  $\mathcal{J}$  indique la position de point où l'on évalue  $\alpha$ , le second la position où l'on prend  $\beta$ : par exemple,  $\mathcal{J}^{+\times}$  prend  $\alpha$  sur l'horizontale et la verticale, alors que  $\beta$  est pris sur les obliques ( $x = x_0 + i\Delta x$ ;  $y = y_0 + j\Delta y$ .)



Figure 11.1 : Jacobien en axes obliques.

#### **11.2.2** Laplacien discret

Tout comme dans le paragraphe précédent, nous pouvons discrétiser le Laplacien d'une fonction  $\alpha$  de différentes manières

$$\Delta^{+} = \frac{1}{\Delta x^{2}} (\alpha_{i+1,j} + \alpha_{i-1,j} - 2\alpha_{i,j}) + \frac{1}{\Delta y^{2}} (\alpha_{i,j+1} + \alpha_{i,j-1} - 2\alpha_{i,j}),$$
(11.28)

$$\Delta^{\times} = \frac{1}{2\Delta x^2} \left( \alpha_{i+1,j+1} + \alpha_{i-1,j+1} + \alpha_{i+1,j-1} + \alpha_{i-1,j-1} - 4\alpha_{i,j} \right), \tag{11.29}$$

mais cette dernière expression (11.29) n'étant réalisable et consistante que pour  $\Delta x = \Delta y$ . On peut donc écrire le Laplacien comme

$$\Delta^d = (1 - e)\Delta^+ + e\Delta^\times, \tag{11.30}$$

où l'on prend e = 0 si  $\Delta x \neq \Delta y$ .

#### 11.2.3 Schéma d'Euler

Pour la résolution temporelle, nous proposons le schéma explicite simple d'Euler, c'est-à-dire que nous calculons

$$\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n}}{\Delta t} = -\frac{1}{h} \mathcal{J}^{d}(\psi_{i,j}^{n}, \omega_{i,j}^{n}) + \tilde{\kappa} \Delta^{d} \omega_{i,j}^{n} - \frac{\beta}{2\Delta x} (\psi_{i+1,j}^{n} - \psi_{i-1,j}^{n}) 
+ \mathbf{e}_{3} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_{h} \Lambda \boldsymbol{\tau}^{s}) - \frac{\delta_{E}}{2H} f \left\{ \alpha \omega_{i,j}^{n+1} + (1 - \alpha) \omega_{i,j}^{n} \right\},$$
(11.31)

$$\Delta^d \psi_{i,j}^{n+1} = \omega_{i,j}^{n+1}.$$
(11.32)

Rien n'empêche d'envisager d'autres schémas temporels ou spatiaux tels que les méthodes implicites, semi-implicites, à directions alternées implicites, à plusieurs pas de temps etc.



Figure 11.2 : Vectorisation.

#### 11.2.4 Surrelaxation Red - Black, Gradient Conjugé, FFT, Multigrille

Pour résoudre (11.32), nous nous astreignons au cas où e = 0. Dans ce cas, les méthodes de résolution de (11.32) sont nombreuses et performantes. Il faut en effet remarquer que cette équation doit être résolue à chaque pas de temps. Pour la résolution du système linéaire (11.32), la méthode la plus performante imaginable est une méthode qui a un nombre d'opérations proportionnel au nombre d'inconnues N. On sait que la méthode de Gauss-Seidel nécessite à peu près N itérations pour converger et le nombre d'opérations est donc de N<sup>2</sup>. La méthode de Gauss-Seidel avec surrelaxation optimale converge, quant à elle, en N<sup>1/2</sup> itérations et le nombre d'opérations est proportionnel à N<sup>3/2</sup>.

Pour des géométries simples, le paramètre de surrelaxation optimal peut être obtenu analytiquement alors que dans une géométrie plus compliquée, on peut l'optimiser le long des itérations temporelles ou le calculer numériquement au départ.

Cependant, l'avènement d'ordinateurs vectoriels demande de revoir quelque peu les critères de choix des méthodes de résolution. En effet un programme qui, sur un ordinateur classique, est plus lent qu'un autre, peut être plus rapide sur un ordinateur vectoriel parce qu'il permet une vectorisation efficace. Explicitons ce qu'on entend par vectorisation : dans un ordinateur classique séquentiel, le processeur effectue une opération après l'autre, même si les opérations successives sont indépendantes; ce qui a poussé les chercheurs à penser à des architectures pouvant en quelque sorte effectuer plusieurs opérations à la fois. Une méthode consiste alors à mettre au travail plusieurs processeurs à la fois (parallélisation) ou de faire commencer au processeur une nouvelle opération avant qu'il n'ait fini celle (s) en cours (vectorisation). Nous allons expliciter la vectorisation. En fait, pour que le processeur puisse commencer une nouvelle opération avant la fin d'une autre, il faut que chaque opération soit subdivisée en plusieurs sous-opérations, chaque sous-opération pouvant être effectuée " en une fois (en un cycle d'horloge) "; schématiquement : voir (figure **11.2**).

L'utilisateur verra donc (après un temps d'initialisation) sortir un résultat complet à chaque cycle au lieu d'un résultat tous les n cycles (n est le nombre de sous-opérations de l'opération). Le gain peut donc être considérable. Cependant, pour pouvoir faire ce chaînage, il faut satisfaire



**Figure 11.3 :** *Itérations du red-black. Points balayés durant les itérations paires* ( $\bullet$ ) *et impaires* ( $\diamondsuit$ ).

quelques conditions :

- 1. il faut que les calculs soient organisés dans une boucle;
- 2. il ne faut pas que le calcul soit interrompu par une opération avec le système d'entrée-sortie (pas de read write dans la boucle);
- il faut que les calculs dans la boucle soient indépendants, c'est-à-dire que le processeur puisse commencer l'opération sur les opérandes suivantes sans avoir besoin du résultat des opérations en cours.

Il est donc clair que les méthodes de résolution récurrentes (tel que Gauss-Seidel) ne sont pas vectorisables dans leur version originale. Par contre, les méthodes telles que Jacobi le sont par le caractère explicite des itérations. On a donc imaginé des méthodes de résolution combinant les deux techniques : la méthode de RED-BLACK consiste, par exemple, à balayer deux fois le domaine selon la stratégie suivante.

On voit aisément que, procédant de cette façon, les calculs sont indépendants, même si on remplace directement les nouvelles valeurs dans l'ancienne matrice.

Une autre méthode couramment utilisée pour la résolution de systèmes linéaires creux est basée sur la minimisation numérique d'une fonctionnelle construite à partir du système linéaire à résoudre. Ce sont les méthodes de gradient ou de gradient conjugué qui convergent plus rapidement que les méthodes de surrelaxation mais demandent plus de calculs par itération. D'autres méthodes encore sont basées sur une décomposition en modes de Fourier discrets sur une grille régulière, et la méthode la plus performante dans ce cas académique est celle basée sur une méthode de surrelaxation sur des grilles imbriquées de plus en plus fines (multigrilles). A ce sujet, voir p. ex. [?].

#### 11.2.5 Conditions limites aux côtes

Si la condition d'imperméabilité des côtes est facilement imposée

#### 11.2. MÉTHODES NUMÉRIQUES

la condition d'annulation de la vitesse tangentielle est moins évidente. Il faudrait en fait imposer que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = 0. \tag{11.34}$$

Il faut traduire cette condition mathématique (11.34) en une condition limite numérique pour  $\omega$ . Or, si par exemple, nous nous approchons d'une côte en i = I, nous avons

$$\omega_{I,j} = \frac{1}{\Delta x^2} (\psi_{I+1,j} + \psi_{I-1,j} - 2\psi_{I,j}) + \frac{1}{\Delta y^2} (\psi_{I,j+1} + \psi_{I,j-1} - 2\psi_{I,j}).$$
(11.35)

Or, le long de la côte,  $\psi$  est constant et selon la normale nous pouvons discrétiser (11.34) comme  $\psi_{I-1,j} = \psi_{I+1,j}$ . Nous avons donc la condition limite pour  $\omega$  à chaque pas de temps

$$\omega_{I,j} = \frac{2}{\Delta x^2} (\psi_{I+1,j} - \psi_{I,j}), \qquad (11.36)$$

et semblablement pour les autres côtes.

#### 11.2.6 Conditions de stabilité numérique

Le schéma de résolution étant suggéré, il faudrait encore en étudier la stabilité. En toute généralité, ceci est trop difficile, et nous nous limiterons à quelques cas simples.

#### Schéma de diffusion

Si nous ne retenons que le terme de diffusion et de dérivée temporelle dans l'équation (11.7), pour e = 0, une analyse de stabilité de Von Neumann fournit la condition de stabilité

$$\tilde{\kappa}\Delta t\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right) \le \frac{1}{2}.$$
(11.37)

Cependant, pour éviter des oscillations non-physiques il est nécessaire d'avoir

$$\tilde{\kappa}\Delta t\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right) \le \frac{1}{4}.$$
(11.38)

#### **Advection par le Jacobien**

Si, sur un domaine, on a  $\alpha$  ou  $\beta$  constant le long des frontières, il est aisé de montrer à partir des expressions (11.15)-(11.16) que

$$\overline{\mathcal{J}(\alpha,\beta)} = 0, \tag{11.39}$$

$$\overline{\alpha \mathcal{J}(\alpha,\beta)} = 0, \tag{11.40}$$

$$\beta \mathcal{J}(\alpha, \beta) = 0, \tag{11.41}$$

où<sup>-</sup>désigne l'intégrale sur le domaine en question.

A partir de ces propriétés, on peut alors montrer que pour l'écoulement régi par

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathcal{J}(\psi, \omega) = 0, \qquad (11.42)$$

$$\Delta_h \psi = \omega. \tag{11.43}$$

les quantités suivantes sont conservées dans un domaine où il n'y a pas de flux entrant ou sortant

$$\overline{\omega} = \overline{\Delta_h \psi} \tag{11.44}$$

$$2T = (\Delta_h \psi)^2 \tag{11.45}$$

$$2V = \overline{\omega^2} = \overline{(\Delta_h \psi)^2} \tag{11.46}$$

Si le schéma numérique utilisé pour résoudre (11.42)-(11.43) satisfait les mêmes conditions intégrales, alors on est assuré que le schéma est cohérent avec les processus physiques. Arakawa [?] a montré que c'est le cas si on utilise a = b = c, d = 0. Pour des raisons de précision, il est cependant recommandé de ne pas violer la condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) :  $\frac{U\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{2}$ .

#### **11.2.7** Conditions initiales

Une possibilité est de partir du repos ou de la solution stationnaire (due à Munk) du problème à faible nombre de Reynolds (problème linéaire)

$$\psi(x,y) = \phi(x) \sin\left(\pi \frac{y}{L}\right), \qquad (11.47)$$

où  $\phi(x)$  doit satisfaire alors une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre non-homogène à coefficients constants.

## 11.3 Application

Calcul numérique de la solution de (11.12) - (11.13)

Calculer la vitesse caractéristique  $U = \frac{\tau}{hf}$ ,  $U = \frac{\tau}{h\beta L}$ , et le nombre de Reynolds associé à la seconde vitesse caractéristique (plus grande que la première, par ailleurs).

Trouver des longueurs caractéristiques incluses dans les équations, évaluer les et en déduire le pas de la maille numérique adéquat.

Choisir une méthode de résolution rapide de l'équation de Poisson. S'il s'agit d'une méthode itérative, donner et justifier le critère d'arrêt des itérations.

Choisir un pas de temps adapté au schéma numérique et aux processus physiques. Données

$$L_x \sim 1000 \,\mathrm{km},$$
 (11.48)

$$\beta \sim 10^{-11} \,\mathrm{m}^{-1} \mathrm{s}^{-1},$$
 (11.49)

$$\tau_x = -0.610^{-4} \cos(\pi y/L) \,\mathrm{m}^2 \mathrm{s}^{-2}; \tau_y = 0, \tag{11.50}$$

$$H \sim 100 - 1000 \,\mathrm{m},$$
 (11.51)

$$\delta_E \sim 10 \,\mathrm{m} \tag{11.52}$$

Etudier plusieurs Reynolds différents (2-70).

Commenter en utilisant la notion d'ondes de Rossby barotropes.<sup>2</sup>

Simulations facultatives :

1) voir si une variation de topographie induit le même effet que l'effet  $\beta$ , et comment varie la solution si on ouvre les frontières au sud et au nord (quelles sont les conditions limites à appliquer ?)

2 ) Positionner un cyclone (ou anticyclone) au centre du domaine et laisser évoluer le système non forcé à grand nombre de Reynolds. Que se passe-t-il et pourquoi ?

## **Exercice**

#### Solution de Stommel

Si nous nous intéressons aux écoulements à très grande échelle, l'équation, réduite à ses termes dominants, devient

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \beta = \mathbf{e}_3 \cdot (\boldsymbol{\nabla}_h \Lambda \boldsymbol{\tau}^s) \tag{11.53}$$

avec le vent proposé dans l'application 11.3, cela permet de calculer la fonction de courant à une fonction f(y) près. Cette fonction ne permet pas de satisfaire deux conditions aux limites. Montrer que le problème est un problème de couches limites. Calculer la solution dans la couche limite en supposant que le terme de friction au fond y joue un rôle important avec l'effet  $\beta$ . Montrer par la conservation de la masse d'eau que la couche limite doit se situer à la frontière à gauche.

Montrer que la solution combinée s'écrit

$$\psi = \frac{L_x}{\beta} \frac{\partial \tau_x^s}{\partial y} \left[ 1 - \frac{x}{L_x} - e^{-2\frac{\beta}{f}\frac{H}{\delta_E}x} \right]$$
(11.54)

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> solutions du type onde de (11.13) réduit à :  $\frac{\partial \Delta_h \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \beta = 0.$ 



Figure 11.4 : Solution de Stommel.